Czasopismo Filozoficzne 6 (2010), s.71-88.
ISSN 1896-5059

Zabobonny lęk i cześć matematyków wobec sprzeczności. Gödlowskie sztuczki vs Wittgensteinowskie fortele (analiza paradoksów)[1]

Greta Wierzbińska

Abstract: Wittgenstein's RFM remarks on Gödel's First Incompleteness Theorem have been widely criticized, ridiculed or dismissed out of hand. The principal reason for this is negative evaluation of Wittgenstein's critique is not Wittgenstein rejection of the standard interpretation of Gödel's result but rather an exaggerated reaction to a alleged „mistake" Wittgenstein makes while discussing GIT. The aim of my paper, which due to Wittgenstein's method is merely a draft, is to pull apart the different and the very distinct strands in these remarks to understand them in the context of Wittgenstein's own philosophy of mathematics, and to determine what merit they have. To understand Wittgenstein's attitude I will point out his hostility towards mathematical realism, hostility based on the „rule-following considerations" and his conventionalism. As I shall show, the aim of Wittgenstein's critique is not a *proof* itself but it's certain philosophical interpretation (*prose*). On a number of occasions this leads Wittgenstein to say that we should *simply* „withdraw" or „give up" *this* interpretation as if the contradiction goes away with the natural language interpretation.

Key words: philosophy of mathematics, Gödel's First Incompleteness Theorem, inconsistency, paraconsistent arithmetic, paradoxes, liar paradox,self-reference.

W swoich ostatnich pracach na temat filozofii matematyki, zwłaszcza w *Uwagach o podstawach matematyki* Wittgenstein zajmuje się badaniem statusu matematycznych i logicznych sprzeczności. Przy tej okazji przedstawia swoje uwagi odnośnie pierwszego Twierdzenie Gödla o niezupełności arytmetyki liczb naturalnych. Stanowisko Wittgensteina było szeroko krytykowane, deprecjonowane lub z miejsca zupełnie pomijane. W niniejszym artykule będę argumentować na rzecz tezy, iż głównym powodem negatywnej oceny Wittgensteinowskiej krytyki było nie tyle odrzucenie przez autora *Dociekań…* standardowej interpretacji wyników Gödla, ile raczej przesadzona reakcja na domniemany 'błąd', który rzekomo przy okazji dyskutowania I twierdzenia Gödla Wittgenstein miał popełnić.

[1] Aluzja do słów Wittgensteina, który określił wyniki Gödla jako triki logicznego kuglarza, logiczne sztuczki: „die logische Kunststücken".

Opublikowano online: 01.12.2010

Celem mojego artykułu, który, zgodnie z zamysłem filozofii Wittgensteina, ma pełnić jedynie rolę szkicu, zestawu ‘przypomnień gromadzonych dla określonego celu’ jest próba analizy znaczenia różnych odrębnych aspektów Wittgensteinowskiego stanowiska, przeprowadzona w kontekście jego filozofii matematyki. W toku rozważań będę próbowała wykazać ścisły związek awersji autora *Traktatu…* wobec matematycznego platonizmu z rozważaniami na temat ‘kierowania się regułą’. Spróbuję w jakimś stopniu zbadać kwestię dość łagodnego stanowiska Wittgensteina w sprawie sprzeczności jako możliwej konsekwencji radykalnego konwencjonalizmu Wittgensteina w sprawie prawd logiki i matematyki. Postaram się również pokazać, iż to nie tyle sam *dowód* ile jego pewna interpretacja (*prose*) stanowiły cel Wittgensteinowskiej krytyki. Pokrótce omówię także Wittgensteinowskie stanowisko z pozycji paradygmatu logik parakonsystentnych oraz postaram się wykazać, iż uznanie zdania Gödla za standardowy paradoks (w rodzaju zdania kłamcy), stanowiło niejako naturalną konsekwencję odrzucenia przez Wittgensteina rozróżnienia między teorią a metateorią. Na koniec przedyskutuję filozoficzne i historyczne znaczenie Wittgensteinowskiego stanowiska w sprawie twierdzenia Gödla porównując je z koncepcjami zaproponowanymi przez Tarskiego, Heijenoorta, Floyd czy Putnama.

Są w dziejach filozofii myśli przepastne, a więc z jednej strony do dziś zadziwiające, z drugiej takie, iż czuje się, że „coś w nich jest” – nawet jeśli nie potrafi się powiedzieć co. Uznanie myśli za przepastną, nie zaś za mętną wymaga przyjęcia przez interpretatora sformułowanej przez Ajdukiewicza-Davidsona dyrektywy życzliwości interpretacyjnej, w myśl której należy przyglądać się cudzym myślom w sposób możliwie wolny od stereotypów. Pojawiające się w *Uwagach o podstawach matematyki* wypowiedzi Wittgensteina negujące znaczenie pierwszego twierdzenia Gödla (o nierozstrzygalności arytmetyki liczb naturalnych) na gruncie filozofii matematyki są przez większość podejmujących ten temat autorów bagatelizowane[2]. Kreisel, Dummett, czy Bernays traktują je jako niefortunny epizod w karierze wielkiego filozofa, który padł ofiarą błędnej interpretacji zasadniczej idei leżącej u podstaw Gödlowskiego programu, lub, jak kto, woli fatalnego nieporozumienia. Komentatorzy ci zwracali uwagę na fakt, iż ową należącą do systemu formalnego nierozstrzygalną Gödlowską formułę G1 traktował Wittgenstein jako zdanie

[2] Nawet tak gorący zwolennik filozofii Wittgensteina jak M. Dummett wyraża w jednej ze swych prac opinię, że jego (Wittgensteina) uwagi na temat twierdzenia Gödla i pojęcia niesprzeczności są „kiepskiej jakości i zawierają błędy”.

antynomialne, nie różniące się z grubsza od zdania kłamcy, zaś przeprowadzony przez Gödla dowód jako prostą dedukcję sprzeczności[3]. Wyjątkami są tu m.in. (życzliwie objaśniająca stanowisko autora *Traktatu*, jedna z najbardziej skrupulatnie napisanych prac) rozprawa Stuarta Shankera. „Wittgenstein remarks on Gödel's theorem" zamieszczona w pracy *Gödel's theorem in focus* (1988) oraz artykuł Juliet Floyd „On Saying What You Really Want To say: Wittgenstein, Gödel, and the Trisection of the Angle", który ukazał się w antologii: *From Dedekind to Gödel: Essays on the Development of the Foundations of Mathematics* (1995). Reakcje samego Gödla są dość zabawne i wyjątkowo zgryźliwe[4]. W tym kontekście pojawiające się w jego liście do A. Robinsona z 1973 roku kwalifikujące opinię autora *Traktatu* jako „kompletnie trywialne i mało interesujące nieporozumienie"[5] uwagi, należałoby uznać za wyjątkowo łagodną reakcję na Wittgensteinowskie „wybryki". W tych okolicznościach, nie powinien dziwić więc fakt, iż wielokrotnie przeprowadzane przez Wittgensteina próby demitologizacji dokonań Gödla zostały niemal kompletnie zignorowane.

1. „Matematyczne zdania nie wyrażają żadnej myśli"[6]

Heurystyczną bazą dla niniejszych rozważań niech będzie zdanie sprawy z faktu, iż według (drugiego) Wittgensteina nie istnieją żadne obiekty, mogące być przedmiotem poznania matematycznego. Ponieważ poznanie matematyczne nie jest poznaniem *sensu stricte*, nie można, jego zdaniem, traktować wiedzy matematycznej jako „wiedzy że". Jak pisze Wittgenstein w paragrafie 32 *Philosophische Grammatik*: „Znaczenie jest tym, co wyjaśnia wyjaśnienie znaczenia"[7]. Czy ma to związek z jego koncepcją dowodu? Co Wittgenstein ma na myśli, kiedy pisze, że jego badania mają charakter gramatyczny? To, co zdaniem Wittgensteina, łączy prawa logiki i zdania matematyczne z regułami gramatyki to

[3] Kreisel np. miał podobno powiedzieć, że Wittgenstein zapoznał się najwyżej z pierwszym rozdziałem pracy Gödla z 1931 roku. W odkrytej przeze mnie ostatnio książce *Wittgenstein und der Wiener Kreis*, na stronie 27 możemy przeczytać, że w lipcu 1935 Wittgenstein napisał do Schlicka, zachowany przez córkę Schlicka, długi list na temat pracy Gödla z 1931 roku. Prawdopodobnie materiały te znajdują się w elektronicznym archiwum z Bergen. Por. *Bergen. Electronic Edition* (BEE). Nie wiadomo natomiast skąd Wittgenstein czerpie tego rodzaju informacje. Z całą pewnością Gödel nie wspomina nic na ten temat w wykładzie, który dostarczył Kołu Wiedeńskiemu (*1931?) i o którym prawdopodobnie Wittgenstein mógł był słyszeć.

[4] Kilka z nich można znaleźć w pracy Hao W a n g a: *A logical journey: From Gödel to Philosophy*. Cambridge, Mass 1991.

[5] S. S h a n k e r: *Wittgenstein remarks on the Signifacance of Gödel's Theorem*. In: *Gödel's Theorem in focus*. Ed. S. S h a n k e r. London 1988, s. 89.

[6] L. W i t t g e n s t e i n: *Logisch-philosophische Abhandlung*. Frankfurt am Main 1963 (tłumaczenie własne), § 6.21.

[7] L. W i t t g e n s t e i n: *Philosophische Grammatik*. Frankfurt am Main 1984, § 32.

fakt, że są one pozbawione sensu. Ponieważ zdania matematyki nie mówią nic o świecie, przyswajając matematykę nabywa się po prostu wyłącznie określonych przyzwyczajeń, opanowuje rozmaite techniki, uczy pewnych zachowań[8].

Ustalenia ogólne definiujące Wittgensteinowską filozofię matematyki można sprowadzić do trzech zasadniczych założeń:

(1) W poza matematycznych twierdzeniach dotyczących liczb, zdania matematyki nie funkcjonują jak wyrażenia referencyjne;

(2) Znaczenie symboli matematycznych jest wyznaczone przez ich użycie w poza matematycznych twierdzeniach dotyczących liczb;

(3) Na gruncie matematyki prawdziwość identyfikuje się z dowodliwością, co oznacza, iż wyłącznie teorie matematyczne odpowiadają za wyznaczanie sensów zdań matematycznych. Dlatego mówienie o przekładalności znaczeń między dwiema teoriami nie miałoby większego sensu. Innymi słowy, należy pamiętać, że w matematyce znaczenie nie jest tym samym, co oznaczanie. Matematyka jest, zdaniem Wittgensteina, częścią gier językowych, zdanie jest więc „gramatyczne" w tym sensie, że analizuje tylko grę, ta zaś wyznacza znaczenie pojawiających się w niej pojęć. Takich gier jest wiele, tak wiele jak wiele jest systemów matematycznych czy teorii, dlatego mówienie o istnieniu jakichś wspólnych znaczeń wymagałoby nałożenia obostrzenia związanego z rozważaniem znaczeń różnych teorii/systemów z pozycji jakiegoś bardziej uniwersalnego metasystemu.

Interesujące w kontekście powyższych rozważań jest to, że Wittgenstein nie podważa bynajmniej matematycznej poprawności Gödlowskich twierdzeń. „Moim celem nie jest mówić o dowodzie Gödla, lecz mówić, omijając go"[9] – pisze w *Uwagach o podstawach matematyki,* po to tylko, by w innym miejscu dodać, że rozumowanie Gödla interesuje go jedynie jako narzędzie ułatwiające wyjaśnienie tego, „co znaczy w matematyce zdanie w rodzaju: «załóżmy, że można to udowodnić»"[10].

---

[8] To, co łączy prawa logiki i zdania matematyczne z regułami gramatyki to fakt, że są bezsensowne, nie mówią nic o świecie. Zdanie jest „gramatyczne" w tym sensie, że analizuje tylko grę. Jedynym językiem, który Wittgenstein rzeczywiście badał i z którego wywiódł koncepcję gier językowych, nie był żaden język naturalny, lecz wyłącznie język matematyki w dobie sporu o jej podstawy. Wittgenstein stoi na stanowisku, iż matematyka jest częścią gier językowych, które uprawiamy. Każda taka gra określa znaczenie pojęć w niej używanych. Przy tym matematyka nie jest jedna ale ma charakter zróżnicowany: jest wiele takich gier, czyli wiele systemów, teorii matematycznych i nie ma żadnego powodu żeby sądzić, iż uda się ustalić dla nich jakąś wspólną miarę.

[9] L. W i t t g e n s t e i n: *Uwagi o podstawach matematyki,* tłum. M. P o r ę b a. Warszawa 2001, s. 317.

[10] Ibidem, s. 322.

Jedynym językiem, który Wittgenstein badał, i z którego wywiódł koncepcję gier językowych, nie był, co istotne, język naturalny, lecz właśnie język matematyki w dobie sporu o jej podstawy. W świetle powyższych ustaleń nie dziwi więc fakt, iż odrzucenie przez Wittgensteina ram epistemologicznych, w których funkcjonował beztroski i naiwnie przyznający teoriom matematycznym status procedur charakteryzujących się absolutną pewnością program Hilberta, a w dalszej kolejności odmówienie twierdzeniu Gödla ważności było jedynie naturalną konsekwencją obranych założeń[11].

2. Uwagi na temat niesprzeczności

Zacznę od krótkiego omówienia poglądów Wittgensteina w sprawie problemu sprzeczności. Uwagi te, mam nadzieję, pomogą do pewnego stopnia rozjaśnić powody takiego a nie innego stanowiska Wittgensteina w sprawie programu Gödla. „Sprzeczność jest to coś, co jest wspólne zdaniom, co żadnemu zdaniu nie jest wspólne z innym. Tautologia jest to coś wspólnego wszystkim zdaniom, które nie mają z sobą nic wspólnego. Sprzeczność znika niejako poza obrębem wszystkich zdań, tautologia znika pośród nich. Sprzeczność jest zewnętrzną granicą zdań, tautologia ich beztreściowym środkiem”[12].

Jak widać sprzeczność w rodzaju „p i ~p” została tu potraktowana w podobny sposób co tautologia w rodzaju: „~(p i ~p)”. Ponieważ nie posiadając jakiejkolwiek treści informacyjnej obie są nie tyle niedorzeczne, ile pozbawione sensu. A zatem prawo sprzeczności nie jest pustą koniunkcją o postaci: „~(p i ~p)”, ale regułą zakazująca wyrażeń w rodzaju „p i ~p”. Wszelkie zamknięte logiczne systemy aksjomatyczne są wewnętrznie sprzeczne. Russell udowodnił to Fregemu, a Wittgenstein Russellowi. Systemy te produkują przede wszystkim tautologie. Dlatego nie ma potrzeby wprowadzania aksjomatów, twierdzeń czy reguł wynikania logicznego. Podążając tym tropem, można powiedzieć, iż tym, czego obawiają się logicy są nie tyle sprzeczności *per se*[13], lecz właśnie przypadki naruszenia owej specyficznej reguły, jaką jest na przykład reguła dotycząca nie wycofywania założeń, z których wynika sprzeczność. Gdyby istniało coś, co moglibyśmy określić jako sprzeczną regułę, musiałaby ona wskazywać posługującemu się nią, jak (zgodnie z nią) powinien on

[11] Por. ibidem, s. 97 i 210.
[12] L. W i t t g e n s t e i n: *Traktat logiczno-filozoficzny*, tłum. B. W o l n i e w i c z. Warszawa 1970, § 5.143.
[13] Mają one pewną rolę do odegrania, zwłaszcza w przypadku rozumowań typu *ad absurdum*.

postąpić. Tymczasem sprzeczne zdanie nie jest posunięciem w grze językowej, tak jak stawianie i wycofywanie figury z pola szachownicy bynajmniej nie jest ruchem szachowym[14].

Ten osobliwy punkt widzenia, napotkał na duże niezrozumienie nie tylko ze strony matematyków, ale także filozofów matematyki. „Sprzeczność. Dlaczego akurat to jedno straszydło?"[15] – pyta autor w *Uwagach o podstawach matematyki*, diagnozując popularny wśród matematyków syndrom[16], argumentując dalej, iż nie ma powodu, dla którego mielibyśmy traktować sprzeczną (w każdym razie przynajmniej do momentu, w którym trafimy na sprzeczność) teorię jako zasadniczo mniej użyteczną niż teorię niesprzeczną. Jak pisze Wittgenstein w *Dociekaniach*: „Sprzeczności nie należy traktować jako katastrofy, ale traktować je jak granicę, która wskazuje nam, że nie możemy w tym miejscu posunąć się dalej"[17].

Kluczem do zrozumienia stanowiska Wittgensteina w kwestii niesprzeczności, a także jego późniejszej filozofii matematyki, jest przede wszystkim zdanie sobie sprawy z tego, iż u jego podstaw znajduje się ogólna czy też „radykalna" teoria konieczności, nie zaś, jak się powszechnie sądzi, konstruktywizm. Atrakcyjność takiego ujęcia sprawy tkwi przede wszystkim w pozbawieniu pojęcia prawdy koniecznej jej epistemologicznej zagadkowości[18].

Niestety, zasadniczą słabością tej teorii jest jej niezdolność do wyjaśnienia pojęcia konsekwencji. Fakt, iż pewne podstawowe konwencje posiadają określone konsekwencje jest prawdą konieczną, ale sam nie może być traktowany jako podstawowa konwencja. Nie wiadomo zatem co w takim razie miałoby być źródłem owej konieczności?[19] Próbując odeprzeć tego rodzaju zarzuty, Wittgenstein przyjmuje założenie, zgodnie z którym wszystkie prawdy konieczne, włącznie ze zdaniami będącymi logicznymi konsekwencjami, mają

---

[14] Uwagi na ten temat w: L. W i t t g e n s t e i n: *Lectures on the foundations of mathematics*. Cambridge 1976, s. 212-214, 223 oraz w: L. W i t t g e n s t e i n: *Philosophische Grammatik*…, s. 128–129, 305.

[15] Por. m.in. L. W i t t g e n s t e i n: *Uwagi o podstawach matematyki…,* s. 168–181, 210–212, 305–313, 332–333. Warto odnotować, że według Wittgensteina ukryta sprzeczność nie jest tym samym, co sprzeczność niezauważona, czyli taka, która wyraźnie pojawia się w zbiorze reguł ale po prostu zostaje przeoczona czy też taka, którą można wygenerować posługując się w tym celu pewną określoną metodą. Sprzeczność ukryta to sprzeczność, która została dodana do systemu wraz z wprowadzeniem nowego rodzaju konstrukcji nieprzewidzianego typu, np. konstrukcji w rodzaju „X jest elementem samej siebie". Zgodnie z taką interpretacją, Russell nie odkrył w rachunku Fregego już istniejącej sprzeczności, ile wymyślił sposób konstruowania sprzeczności, tym samym modyfikując ów rachunek.

[16] Określany jako „zabobonny lęk i cześć matematyków wobec sprzeczności".

[17] L. W i t t g e n s t e i n: *Zettel*. Ed. G.E.A. A n s c o m b e, G.H. von W r i g h t. Berkeley and Los Angeles 1967, § 687.

[18] Rozwiązanie Kripkego m.in. polegało na odróżnieniu pojęć konieczności i aprioryczności, zakwalifikowaniu konieczności jako kategorii metafizycznej, zaś aprioryczności jako epistemologicznej.

[19] Por. M. D u m m e t t: *Truth and other enigmas*. Cambridge, Mass. 1978.

charakter konwencjonalny. Tego rodzaju stanowisko ma bezpośredni związek z podtrzymywanym przez Wittgensteina przekonaniem, zgodnie z którym nie mogą istnieć nieuświadomione wewnętrzne związki obowiązujące na gruncie gramatyki. „Nie możemy dokonywać odkryć – pisze Wittgenstein w *Philosophical Remarks* – na gruncie składni”[20].

W świetle powyższych założeń, sam dowód nie tyle stanowi potwierdzenie tego, że wynik jego zastosowania „gdzieś” istnieje, ile wynik ten nie istnieje dopóty, dopóki dowód go nie ustali. Zdaniem Wittgensteina, dowód zmienia gramatykę naszego języka, stwarza nowe związki pojęciowe. Ponieważ z punktu widzenia radykalnego konwencjonalisty, wszystkie konieczne prawdy są konwencjami, które ustalamy sami, nonsensem byłoby mówić o ich odkrywaniu, czy o tzw. „ukrytych” sprzecznościach. Byłoby to równoznaczne z przyjęciem założenia, że jest z góry ustalone, że dana formuła, a w tym wypadku sprzeczność, wynika z aksjomatów zanim jeszcze zostanie przez nas ustanowiona.

Interesującą krytykę stanowiska Wittgensteina w sprawie niesprzeczności możemy znaleźć m.in. w pracach Charlesa Chihary[21]. Zdaniem Chihary istotnym mankamentem sprzecznego systemu jest fakt, iż:„Niesprzeczny system prowadzi nas od prawd do prawd, sprzeczny zaś nie”[22]. Załóżmy, że zaprojektowany przez inżynierów most rozpada się. Możemy podać co najmniej trzy różne możliwe warianty wyjaśnienia sytuacji:

(1) Teorie empiryczne i dane, na których opierał się projekt inżynierów były niestaranne lub niepoprawne;

(2) Popełnili błąd w obliczeniach, ponieważ nie posługiwali się regułami dedukcyjnymi w sposób poprawny;

(3) System logiczny, którego używali był sprzeczny i dlatego przeprowadzone przez nich wnioskowania były niekonkluzywne (tj. reguły wynikania stosowane były poprawnie ale rachunek był niedobry)[23].

Wittgenstein nie przyjąłby zapewne proponowanego przez Chiharę rozwiązania[24], zgodnie z którym z powodu ukrytych w matematyce sprzeczności mogłyby runąć mosty[25].

---

[20] L. W i t t g e n s t e i n: *Philosophical Remarks [1929-1939]*. Oxford 1975, s. 182.

[21] Obok m. in. G. Priesta, M. Steinera czy G. Kreislera. Chihara zwraca uwagę na rzekomą słabość argumentacji autora *Dociekań*, która sprowadza się, jak zauważa Chihara, do podania serii nieprzekonywujących przykładów. Chihara odrzuca możliwość obrony stanowiska Wittgensteina z uwagi na przyjmowany przez niego mocny konstruktywizm w sprawie podstaw matematyki.

[22] Ch. C h i h a r a: *Wittgenstein's Analysis of the Paradoxes in His 'Lectures On The Foundations of Mathematics'*, „Philosophical Review” 86 (July 1977), s. 377–378.

[23] Ibidem, s. 378–379.

[24] Przyjętą również m. in przez Turinga.

Abstrahując od problemu „ukrytych sprzeczności", warto odnotować, że tym, co Wittgenstein ma tutaj na myśli, jest rodzaj niezdrowej zapobiegliwości, czy, chciałoby się powiedzieć, dotycząca niesprzeczności „obsesja". „Dlaczego powinniśmy zamartwiać z powodu sprzecznego systemu?" – pyta Wittgenstein. „Ponieważ zastosowanie sprzecznego systemu mogłoby spowodować, że runąłby most" – ripostuje Turing. Albo: „Ponieważ jeśli potraktujemy zdania systemu jako zbiór instrukcji, to jeśli otrzymamy instrukcję w rodzaju ‘p & ~p’, nie będziemy wiedzieli jak powinniśmy postąpić". Wittgenstein odparłby na to, że nie powinniśmy pozwolić, aby drugorzędne problemy należące do przedmiotu badań fizyki (w pierwszym wypadku) czy te natury psychologicznej (w ostatnim przypadku) determinowały właściwy przedmiot badań filozofii matematyki. Odpowiedź Turinga mogłaby mieć sens o tyle, o ile gdybyśmy w niedalekiej przyszłości wszyscy byli nieśmiertelni i nie miałoby dla nas znaczenia to, czy nasze mosty runą. W takiej sytuacji sprzeczny system nie stanowiłby problemu. Tym podobne problemy, jak się wydaje, są w kontekście przedmiotu badań Wittgensteina bez znaczenia, dlatego wyjaśnienie (3) nie wchodzi w rachubę.

3. Gödlowatość jest rozpowszechnioną chorobą. Każdy ciągnie Gödla w swoją stronę[26]

Rozważania dotyczące ukrytych sprzeczności kierują uwagę Wittgensteina na pierwsze twierdzenie Gödla o niezupełności arytmetyki. Uwagi Wittgensteina na ten temat pojawiają się w „Appendixie III" do części I wydanych pośmiertnie *Uwag o podstawach matematyki,* najmniej znanej i jednej z najbardziej niedocenionych części spuścizny, zwłaszcza zaś w sławnym paragrafie 8: „Wyobrażam sobie, że ktoś kto prosi mnie o radę; mówi: ‘Skonstruowałem zdanie w symbolice Russella (oznaczmy je jako ‘P’), które za pomocą pewnych definicji i przekształceń można zinterpretować tak, by głosiło: ’P nie jest dowodliwe w systemie Russella’. Czy o zdaniu tym nie muszę powiedzieć: z jednej strony jest ono prawdziwe, z drugiej zaś niedowodliwe? Gdyby bowiem przyjąć, że jest fałszywe, prawdą byłoby, że jest dowodliwe! A przecież nie może tak być. Gdyby je zaś udowodniono, dowiedziono by tym samym, że nie jest ono dowodliwe. Tak więc może być ono jedynie

[25] L. W i t t g e n s t e i n: *Lectures on the foundations of mathematics…*, s. 210–221.
[26] Sformułowanie Regisa D e b r a y a z *Gödelite est une maladie qui est devenue répandue*. Cyt. za: S. K r a j e w s k i: *Twierdzenie Gödla i jego filozoficzne interpretacje.* Warszawa 2003, s. 6.

prawdziwe, ale niedowodliwe”[27]. Podobnie jak wtedy, gdy pytamy o to: „w jakim systemie ‘dowodliwe’?’, powinniśmy też pytać o to: „w jakim systemie ‘prawdziwe’?”. ‘Prawdziwe w systemie Russella’ znaczy, jak wiadomo, tyle co: ‘udowodnione w systemie Russella’. ‘Fałszywe w systemie Russella’ oznaczałoby zaś tyle co: ‘coś przeciwnego zostało dowiedzione w systemie Russella’. – Co znaczy zatem twoje: ‘gdyby przyjąć, że zdanie to jest fałszywe’? W systemie Russella znaczy to: ‘gdyby przyjąć, że coś przeciwnego zostało w systemie Russella udowodnione’; jeżeli takie jest twoje założenie, to chyba porzucisz teraz interpretację, w myśl której zdanie to jest niedowodliwe. A przez rzeczoną interpretację rozumiem jego przekład na owo zdanie zwykłego języka (tzn. na zdanie: ‘P nie jest dowodliwe w systemie Russella’). – Jeżeli przyjmujesz, że zdanie to jest dowodliwe w systemie Russella, to tym samym jest ono prawdziwe w sensie Russella, a przeto znów trzeba porzucić interpretację ‘P nie jest dowodliwe’. Jeżeli przyjmujesz, że zdanie to jest prawdziwe w sensie Russella, to wynika stąd to samo. Dalej: jeżeli zdanie to ma być fałszywe w jakimś sensie innym niż Russella, to nie stoi to w sprzeczności z tym, że zostało ono dowiedzione w systemie Russella. (To, co w szachach nazywa się ‘przegraną’, może wszak w innej grze stanowić wygraną.)”[28].

Pierwszą część paragrafu można by z powodzeniem uznać za pewną *wersję*, drugą zaś za *negację* twierdzenia Gödla. *Wersja* twierdzenia Gödla (a także jego dowodu), na którą powołuje się Wittgenstein przyjęłaby w tym wypadku następującą postać: Mamy zdanie matematyki P, które można zinterpretować jako „P jest niedowodliwe”. Jeśli P jest fałszywe, to otrzymujemy dowodliwe, ale fałszywe zdanie, co nie jest możliwe; a zatem musi ono być prawdziwe, ale niedowodliwe. Natomiast *refutacja* twierdzenia Gödla – w dużym skrócie – wyglądałaby następująco: Nie ma sprzeczności w fałszywym, ale dowodliwym zdaniu – fałszywość jest zależna od kontekstu (albo od „gry”). Te same słowa mogą czasami wyrażać prawdę a czasem fałsz. Czy mamy przez to rozumieć, że u podstaw dowodu Gödla leży elementarny błąd?

[27] L. W i t t g e n s t e i n: *Uwagi o podstawach matematyki…,* dod. III, cz.1§ 8. Putnam przypisuje paragrafowi nr 8 kluczowe znaczenie filozoficzne. Mianowicie, jeśli założy się, że P jest dowodliwe w systemie Russella, to należy zrezygnować z przekładu P na polskie zdanie 'P nie jest dowodliwe’ ponieważ jeśli P jest dowodliwe w PM, to PM nie jest ω-niesprzeczny, nie jest możliwy zatem przekład zdania 'P' na zdanie 'P nie jest dowodliwe w PM'. Jest tak ponieważ predykat 'liczba naturalna Ln.(x)' w 'P' nie może być zinterpretowany tak jakby x było liczbą naturalną.
[28] Ibidem.

Gödel miał okazję zapoznać się z uwagami Wittgensteina, na które zareagował podobno zgryźliwym komentarzem: „Jeśli chodzi o moje twierdzenie dotyczące nierozstrzygalnych zdań, to nie ma najmniejszych wątpliwości co do tego, że Wittgenstein go nie zrozumiał (czy też udawał, że go nie zrozumiał). Wittgenstein interpretuje je jako przypadek paradoksu logicznego, podczas gdy jest to wprost przeciwnie, twierdzenie matematyczne należące do absolutnie bezspornej części matematyki”[29]. W świetle powyższej wypowiedzi mogłoby się wydawać, że Wittgenstein pakuje się w kłopoty na własne życzenie. Jakąkolwiek próbę argumentacji na rzecz jego stanowiska należałoby zatem zastąpić, być może, obroną Wittgensteina przed nim samym?

Po pierwsze należy pamiętać, iż Wittgenstein był zdecydowanym przeciwnikiem wyprowadzania filozoficznych konsekwencji z twierdzeń matematyki. „Filozofia [...] zostawia matematykę taką, jaka jest”[30], pisze w *Dociekaniach filozoficznych*, żeby następnie dodać, że „przebrana w fałszywe interpretacje” (teoria mnogości) nie jest otwarta na filozoficzną krytykę. Wydaje się, że zarówno Floyd, jak i Shanker zgodziliby się z tym, że każda filozoficzna interpretacja twierdzenia matematycznego uchodziłaby w oczach Wittgensteina za przeinaczenie. „Dowód formalny dowodzi tylko tego, czego dowodzi”, „problemów, które nas niepokoją, nie jest w stanie rozwiązać coś, co jest częścią matematyki...” Co ciekawe Wittgenstein nie wydaje się mieć żadnych zastrzeżeń po adresem wartości samego dowodu.

Stwierdzenie, że ‘P jest prawdą niedowodliwą’ jest nie tyle twierdzeniem czy fragmentem wspomnianego dowodu ile jego interpretacją (sic!). I to interpretacji właśnie, czego być może nie zrozumiał zarzucający mu opaczne zinterpretowanie samego twierdzenia Gödel – dotyczą obiekcje Wittgensteina. Za zasadnością tej hipotezy przemawia kilka faktów. Juliet Floyd argumentuje, że Wittgenstein nie zamierzał bynajmniej przedstawiać w pierwszej części swojego paragrafu dowodu twierdzenia Gödla, podobnie jak nie zamierzał *obalać* go w jego drugiej części. Wygląda na to, że Gödel nie do końca zrozumiał intencje Wittgensteina, który za cel krytyki obrał nie tyle samo twierdzenie (*proof*), ale jego pewną filozoficzną interpretację (*prose*). Wittgenstein nie miał zamiaru obalać jakiegokolwiek fragmentu matematyki. Powiedziałabym raczej, że próbował „zmienić nastawienie” swoich oponentów

[29] Cyt. za J. F l o y d: *Wittgenstein on 2, 2, 2...: On the Opening of ‘Remarks on the Foundations of Mathematics’*, „Synthese” 87, 1991, s. 143-180.
[30] L. W i t t g e n s t e i n: *Dociekania filozoficzne*…, § 124.

wobec kwestii niesprzeczności, a zatem, że był zaangażowany w rodzaj ‘ideologicznej’ krytyki. W tym kontekście, konkluzja: „Istnieje w systemie Russella zdanie prawdziwe. ale niedowodliwe”, gdzie „prawdziwe” posiada wykraczające poza pojęcie „dowodliwości wewnątrz systemu” znaczenie filozoficzne, byłaby nie tyle twierdzeniem Gödla ile wnioskiem z tego twierdzenia.

Na poparcie swojej tezy, Floyd przytacza uwagę Wittgensteina z paragrafu 14: „Dowód niedowodliwości jest niejako dowodem geometrycznym, dowodem dotyczącym geometrii dowodów. Jest on np. zupełnie analogiczny do dowodu wykazującego, że danej konstrukcji nie da się przeprowadzić za pomocą cyrkla i linijki. Otóż tego rodzaju dowód zawiera element prognozy, element fizykalny. Albowiem w wyniku tego dowodu mówimy przecież komuś: ‘Nie trudź się szukaniem tej konstrukcji (np. trysekcji trójkąta) – można dowieść, że jest ona niemożliwa’. Znaczy to: jest czymś istotnym, że dowód niedowodliwości powinno dać się zastosować w ten sposób. Musi on – można by rzec – stanowić dla nas wystarczający powód do tego, by zaniechać poszukiwania dowodu (a więc określonego rodzaju konstrukcji). Sprzeczność jest bezużyteczna w roli takiej prognozy”[31]. Paradoksalnie, wbrew sugestii Floyd, słowa te można wykorzystać na poparcie tezy przeciwnej.

4. Dlaczego sprzeczność jest bezużyteczna? Czy nie sprawdza się ona na przykład w przypadku dowodów niedowodliwości?

Wyraźnie widać, że to, co Wittgenstein zdaje się mieć tu na myśli, sprowadza się do odnotowania, że w przypadku dowodu Gödla nie wyprowadza się sprzeczności z założenia, że dane zdanie P jest niedowodliwe, ale interpretuje się po prostu samo P jako sprzeczne wewnętrznie (przypominające zdanie kłamcy, o czym Wittgenstein pisze w *Uwagach o podstawach matematyki*[32]) zdanie paradoksalne. Gdyby faktycznie tak było, zaproponowana przez Floyd interpretacja nie miałaby sensu. Zdaniem Wittgensteina właściwe podejście do problemu miałoby polegać na wstrzymywaniu się od interpretowania zdania Gödla w duchu antynomialnym. Sama interpretacja zdania, nie może – jak słusznie zauważa Wittgenstein – uczynić tego zdania niedowodliwym w systemie Russella. A zatem fragment, który Floyd przytacza dla poparcia tezy, iż Wittgenstein zrozumiał i porównywał dowód Gödla do dowodów niemożliwości w algebrze, wydaje się dowodzić tezy przeciwnej.

[31] L. W i t t g e n s t e i n: *Uwagi o podstawach matematyki…,* § 14.
[32] Por. ibidem, s. 4.

Hipotetyczny wynik dowodu niedowodliwości, który Wittgenstein porównuje do wyniku dowodu niemożliwości algebry, nie jest wynikiem Gödla (sic!). Wittgenstein odróżnia poprawnie sformułowaną matematyczną strategię dowodzenia wyników niedowodliwości od tzw. „fałszywego" wyniku Gödla, czyli wyniku konstruowania zdania paradoksogennego. Czy Gödel miał zatem rację przypuszczając atak na Wittgensteina z powodu reinterpretacji jego twierdzenia jako paradoksu? Wydaje się, że sam Gödel jest odpowiedzialny za reinterpretację swojego twierdzenia w takim samym stopniu jak ktokolwiek inny. Istotnie, Wittgensteinowska uwaga jakoby interpretacja zdania P nie dała się utrzymać, ponieważ w tym sensie ją również można by potraktować jako paradoks samoodniesienia, sprowadzając ją do antynomii kłamcy, ma uzasadnienie.

Co ciekawe na początku swojej słynnej pracy dotyczącej nierozstrzygalności *Principia Arithmetica* i systemów pokrewnych, sam Gödel, *explicite* porównał swoje twierdzenie do paradoksu kłamcy.

5. Mit autoodniesienia *de re*

Często przyjmuje się, że pewne zdania mogą odnosić się do samych siebie, że istnieje tzw. „odniesienie *de re*". W paragrafie 86 *Dociekań filozoficznych* mówi się o różnych sposobach odczytywania tabeli, ale pojawia się tam także argument przeciwko możliwości języka prywatnego. Rozważania dotyczące kierowania się regułą kończą się konkluzją, iż nie może istnieć samo-interpretujący się fragment języka oraz, że ten rzekomy metafizyczny związek między obiektami i desygnującymi je nazwami jest jedynie iluzją wywoływaną przez naszą gramatykę. Koncepcje samo-odnośności, samo-zwrotności, uważa Wittgenstein za niespójne. Rozkład jazdy pociągów, który sobie wyobrażam nie daje mi wskazówek co do tego jak z niego korzystać. Podobnie zdanie, które uważa się za samo-odnośne, nie odnosi się do samego siebie *simpliciter* dopóki w grę nie wchodzi podmiot.

Guido Küng wskazuje na ogromny wpływ stanowiska Wittgensteina w sprawie antynomii logicznych na Wittgensteinowską epistemologię. Zdaniem Wittgensteina sprzeczności powstają na skutek niezrozumienia fundamentalnej zasady, zgodnie z którą żadne zdanie nie może orzekać o sobie samym, zaś o wspólnej wszystkim zdaniom formie logicznej, pod groźbą samozwrotności, nie powinno się w ogóle wypowiadać. Wittgenstein przyznaje jednak temu, że owa niewyrażalna forma może zostać jednak jakoś w zdaniu dostrzeżona. Kluczowe są tu paragrafy 492-509 *Dociekań*, zwłaszcza paragraf 502: „Pytanie o sens. Porównaj: „To zdanie ma sens". – 'Jaki?' – 'Ten ciąg słów jest zdaniem'. – 'Jakim?' Oba wyprowadzone z błędnego koła stwierdzenia (jak, być może, zdanie Gödla...) są – jak twierdzi Wittgenstein – przez fakt ich izolacji, bezsensowne. Gdy mówimy, że zdanie jest bezsensowne, to bezsensowny nie jest tu – niejako – jego sens. Wykluczamy wtedy z języka pewne zestawienie słów: wycofujemy je z obiegu"[33]. „Zdanie nie może orzekać niczego o sobie samym, gdyż znak zdaniowy nie może zawierać sam siebie. (Oto cała 'theory of types')"[34]. Zdania te nie wyrażają więc faktycznie niczego, przytacza się je jako przykład niedwuznacznego „czystego" auto-odniesienia.

Wittgenstein sądził, że charakterystyka ta równie skutecznie da się zastosować w przypadku klasycznych logicznych paradoksów. Mianowicie, jak proponuje, ze zdaniem kłamcy czy ze zdaniami typu: „To zdanie nie jest prawdziwe" można poradzić sobie dwojako. Albo wykluczyć je z naszej gry językowej jako niepoprawnie zbudowane, albo zaakceptować ich obecność w mowie potocznej.

6. Gry w matematykę

„Cóż szkodzi sprzeczność powstająca wtedy, gdy ktoś mówi: „Kłamię. – A więc nie kłamię. – A więc kłamię. – Itd."? Chodzi mi o to: czy nasz język staje się mniej użyteczny przez to, że można w tym wypadku z pewnego zdania wywnioskować wedle zwykłych reguł jego przeciwieństwo, a z tego znów tamto pierwsze zdanie? – Bezużyteczne jest samo to zdanie, podobnie jak samo wnioskowanie, dlaczego jednak nie mielibyśmy go przeprowadzać? – Jest to jałowa sztuka! – Jest to gra językowa, podobna do gry w łapki"[35]. Można oczywiście powiedzieć np.: „Kłamię. Tak naprawdę nie wyskoczyłem z pociągu..." kończąc opowiadaną właśnie historię. Jednak w tym przypadku „kłamię" nie odnosiłoby się do samego siebie ale do poprzedzających go uwag. Nam jednak chodzi o przykład zdania, które odnosi się samo do siebie, nie zaś do innego zdania.

Mamy przed sobą zdanie, które mówi samo o sobie, ze nie jest ono dowodliwe (w metamatematycznym systemie *Principia*). Jeśli więc zdaniem, które rozważamy jest to, które mamy przed sobą, to Gödel nie jest w stanie uniknąć potencjalnej Wittgensteinowskiej

[33] L. W i t t g e n s t e i n: *Dociekania filozoficzne*…, § 500.
[34] L. W i t t g e n s t e i n: *Tractatus*…, § 3.332.
[35] L. W i t t g e n s t e i n: *Uwagi o podstawach matematyki…,* cz. I, dod. III.

krytyki platonizmu w sprawie zdań[36]. Zdanie, które mamy przed sobą (w dowodzie Gödla) po pierwsze „stwierdza", że pewna formuła jest niedowodliwa, po drugie zaś okazuje się, że jest to ta sama formuła, która służy nam do wyrażenia owego problematycznego zdania (w tym sensie w jakim okazuje się, że Gwiazda Poranna jest Gwiazdą Wieczorną).Wbrew pozorom tego typu zdanie nie pociąga żadnej niebezpiecznej kolistości, ponieważ stwierdza tyle tylko, że pewna dobrze zdefiniowana formuła (mianowicie formuła otrzymana przez podstawienie jej za n-tą formułę w leksykograficznym porządku) jest niedowodliwa. Dopiero wtórnie, przypadkiem, okazuje się, że jest to ta sama formuła, która posłużyła nam do wyrażenia naszego zdania[37].

Wypowiedzi Wittgensteina zakładają zatem jedynie, utrzymywany przez niego pogląd, że zdanie jest sensowną prawdą matematyczną, tylko jeżeli zostało wyprowadzone w obrębie określonego systemu matematycznego. Można zatem postawić pytanie o to, w jaki sposób zdanie może mówić coś o sobie, odnosić się do samego siebie, poza zewnętrznym factum naszej decyzji w sprawie tego, że dane zdanie mówi to a to? Jest to możliwe dzięki właściwości wskazywania na siebie w ramach pewnego języka logicznego. Kiedy już tego rodzaju język zostanie ustalony przestaje on być podatny na nasze decyzje w kwestii znaczenia i interpretacji. Nadal jednak kwestią tajemniczą pozostaje wyjaśnienie tego, w jakim sensie zdanie może wskazywać „samo na siebie". „Co znaczy że: P i 'P jest niedowodliwe' są tym samym zdaniem? Znaczy to, że te dwa zdania można w pewnej określonej notacji wyrazić tak samo"[38] – pisze Wittgenstein w *Uwagach o podstawach Matematyki* i dalej:

„Ale przecież P nie może być dowodliwe, gdyby bowiem przyjąć, że zostało udowodnione, dowiedzione byłoby zdanie głoszące, że ono samo nie jest dowodliwe[39]. Gdyby jednak P zostało udowodnione albo gdybym sądził, być może wskutek błędu – że je

[36] „Pojęcia i klasy mogą być potraktowane jako obiekty rzeczywiste (…) Wydaje się, że założenie o istnieniu takich obiektów jest równie uzasadnione jak założenie o istnieniu obiektów fizycznych. Filozofia matematyki powinna i musi być metafizyczna. Każda próba eliminacji filozofii prowadzi do zastoju, pesymizmu poznawczego i spowalnia jej postęp. Por. K. G ö d e l: *Russell's mathematical logic*. In: *Collected Works.* vol II. Oxford 1990, s. 119–153.

[37] Jak trafnie zauważa Andrzej Mostowski (*Sentences undecidable in formalized arithmetics*. Amsterdam 1952): „dla dowolnego zdania P teorii S istnieje arytmetyczne zdanie S' (...), które mówi, że S jest niedowodliwe. Nie ma nic paradoksalnego w tym, że dla odpowiednio dobranego S zdanie S' – by tak rzec – przypadkowo okazuje się identyczne z S". Termin „przypadkowo" (*gewissermassen zufällig*) jest użyty nieprzypadkowo, ponieważ występuje w tym kontekście już w oryginalnej pracy Gödla z 1931 roku.

[38] L. W i t t g e n s t e i n: *Uwagi o podstawach matematyki…*, cz.1 dod III. § 9, s. 94.

[39] Wittgenstein słusznie zauważa, że samo pojęcie „zdanie Gödla" nie jest stabilne. Pojawia się niebezpieczeństwo *regressus ad infinitum.*

udowodniłem, dlaczego nie miałbym uznać tego dowodu i powiedzieć, że muszę porzucić moją interpretację słowa ‘niedowodliwe’?”[40]

Wittgensteinowskie wnioski dotyczące znaczenia procedury rozróżniania poziomów, którą dla Wittgensteina jest jedynie przykładem ogólniejszego zjawiska, wydają się jak najbardziej zasadne. *Tak samo* zapisana formuła, ujmowana w ramach różnych teorii, nie jest *tą samą* formułą. Problem samo-zwrotności formuły G można rozpatrywać rozróżniając poziomy, na których posługujemy się formułami, zdaniami, twierdzeniami. Jest niewątpliwe, że przy rozważaniu formuły Gödla operujemy na różnych poziomach. Jest to, po pierwsze poziom F, poziom systemu formalnego T, w którym występują niezinterpretowane formuły. Następnie jest poziom M, poziom metamatematyczny, z pozycji którego mówimy o formułach, dowodach formalnych, niesprzeczności i innych własnościach systemu T. Wreszcie na poziomie A (poziom zwykłej matematyki, w szczególności arytmetyki) mówimy o liczbach, podzielności, ciągach liczb itp.

Można by, więc znów znaleźć racje wskazujące na trafność podejścia Wittgensteina. Przy założeniu istnienia różnych poziomów jednak, nie ma sensu mówienie o samozwrotności formuły G. Problem sprowadza się bowiem do tego czy jako zamierzoną interpretację formalnej arytmetyki (w której konstruujemy G) przyjmiemy zwykłe liczby i różne możliwe ich użycia (również w postaci kodów pojęć z poziomu metateorii) czy też nie. Jeśli nie, to faktycznie G nie będzie mówiło o sobie (ponieważ nie mówi o żadnych formułach, a co najwyżej o liczbach; fakt, iż – jak się okazuje – odpowiadają one pewnym obiektom metamatematycznym, jest dodatkowym sensem, przypisanym arytmetyce niejako z zewnątrz).

7. Co przypisuje się matematyce kiedy mówi się, że nie jest grą, że jej zdania mają sens? Sens niezależny od zdania[41]

Samo zdanie (np. zdanie „to jest napisane kredą”) nie odnosi się do swojego sensu, żeby właściwie pojąć znaczenie twierdzenia Gödla należy przyjąć, że mogą istnieć zdania, które odnoszą się do siebie i tylko do samych siebie. Właściwie postawione pytanie brzmi

[40] L. W i t t g e n s t e i n: *Uwagi o podstawach matematyki…*, cz.1 dod III. par. 10, s. 94

[41] L. W i t t g e n s t e i n: *Philosophische Grammatik…,* rozdz. 11: „Matematyka porównana z grą” (przekład własny).

zatem nie tyle: czy możemy traktować zdanie Gödla jako samoodnośne ile czy jesteśmy do tego zobowiązani? „Czyste auto-odniesienie” (odniesienie *de re*), o którym mówi zdanie Gödla[42] nie jest możliwe. Jest ono konsekwencją decyzji, którą podejmujemy, w celu uporania się z nieuniknioną wieloznacznością interpretacji. A zatem nie jest to już „czyste” auto-odniesienie ponieważ dotyczy nas (naszej decyzji)[43].

8. Lingua characteristica versus *calculus ratiocinator* (Czy istnieje uniwersalny metajęzyk?)

W badaniach matematycznych istotne znaczenie ma język, w którym formułuje się teorie. Gödel był przekonany, że jedynym właściwym do tego celu narzędziem jest logika pierwszego rzędu. To założenie miało silne ugruntowanie w matematycznym platonizmie, którego gorącym zwolennikiem pozostawał. Gödel był przekonany, że istnieje intuicja matematyczna, zgodnie z którą „aksjomaty [logiki pierwszego rzędu] narzucają się nam jako prawdziwe”[44]. Tego rodzaju stanowisko (mimo, iż nie zawęża ono swoich implikacji epistemologicznych tylko do *First Order Logic*) jest przez wielu krytyków uważane za przejaw konwencjonalizmu.

Profesor Jan Woleński słusznie zauważa, iż często wysuwane zarzuty o niewystarczalności *First Order Logic* są bezzasadne. Zdaniem Woleńskiego uciekanie się do logiki drugiego rzędu mija się z celem, ponieważ „posiada ona własności niezbyt intuicyjne (m.in. nie jest zwarta, nie istnieje dla niej efektywna i niesprzeczna aksjomatyka, z której można wyprowadzić wszystkie tautologie II rzędu, i wreszcie jest wprawdzie pełna, ale za cenę rozbicia modeli na zasadnicze i wtórne, przy czym kryterium tego podziału jest pozalogiczne). […] Mamy więc do wyboru: albo zachować jednolitość «dobrej» logiki i formalizacji licząc się z pewnymi niedogodnościami albo też zgodzić się na wielość logik i ich formalizacji za cenę rozmycia samego pojęcia logiki”[45].

W toku rozważań na ten temat można odnieść wrażenie pojawienia się w filozofii Gödla swego rodzaju paradoksu. Z jednej strony twierdzenie Gödla (o niezupełności

---

[42] Także to, które jest źródłem klasycznych paradoksów.

[43] Autorka sceptycznie odnosi się do propozycji Kripkego, zgodnie z którą język zawierający punkt stały może zawierać swój własny predykat nie-prawdziwości. Nie ma stałych punktów odniesienia dla języka, por: C. G a u k e r: *Kripke's Theory of Truth*: http://asweb.artsci.uc.edu/philosophy/gauker/KripkeTruth.pdf.

[44] K. G ö d e l: *Co to jest Cantora problem kontinuum?* W: *Współczesna filozofia matematyki*. Red. R. M u r a w s k i. Warszawa, 2002, s 120–121.

[45] J. W o l e ń s k i: *Metamatematyka a epistemologia*, Warszawa, s. 91.

matematyki) wykazało niemożliwość Leibnizjańskiego projektu *scientia universalis* – uniwersalnej nauki posługującej się *lingua characteristica* – idealnym językiem opisującym całość rzeczywistości. Z drugiej zaś strony projekt ten powrócił niejako tylnimi drzwiami na gruncie Gödlowskiej metafizyki. Czyżby było to zwykłe przeoczenie? Być może jest to raczej konsekwencja przyjętego przez Gödla założenia, zgodnie z którym stosowanie metod formalnych sprzyja rozwiązywaniu również problemów filozoficznych (choć niekoniecznie je rozwiązuje, ujawniając tym samym „nadwyżkowość" filozofii). Odpowiadając na pytanie o zadanie formalizacji Profesor Jan Woleński zaznacza, iż jest ona „sposobem konstruktywnej reprezentacji naszych intuicji. Nawet jeśli skądinąd [np. z twierdzeń imitacyjnych] wiemy, że nie jest to całkowicie realizowalne, każdy częściowy sukces w tym względzie jest ważny"[46].

9. Resumé

Filozofia późnego Wittgensteina to w dużej mierze odmiana, będącego uzgodnieniem aprioryzmu Kanta a skrajnego empiryzmu Milla konwencjonalizmu[47]. Wbrew wysuwanym współcześnie tezom o bezsensowności i niekoherencji stanowisk relatywistycznych, należy pamiętać, że relatywizm nadal pozostaje realnym faktem życia codziennego i że próby filozoficznego ostatecznego rozwiązania tzw. problemu relatywizmu nie mogą odnieść oczekiwanych skutków. Większość konwencjonalistów próbuje uporać się z problemem relatywizmu, uciekając się do tej czy innej postaci symplicyzmu. Zdaniem Wittgensteina przyjęcie relatywizmu językowego, postulatu zrównoważenia różnych dyskursów a także relatywizm w kwestii prawdy, nie musi stanowić problemu do przezwyciężenia ale wręcz przeciwnie, powinien być punktem wyjścia pozwalającym m.in. wyjaśnić problem znaczenia.

Przy takim założeniu język przestaje być przedmiotem filozofii, stając się warunkiem jej uprawiania. W tym kontekście należy rozumieć deklarację, że nie powinno się traktować relatywizmu jako gotowej doktryny, lecz jako programu, który zawsze warto realizować, nawet jeśli sukcesy są tylko lokalne. Charakter przeprowadzonych tu rozważań pozostaje, mam nadzieję w zgodzie z Wittgensteinowskim zamysłem, iż filozofia pozostawia wszystko, takim jakim jest. Mam nadzieję, iż udało mi się częściowo rozjaśnić sprawę niefortunnej recepcji Wittgensteinowskiej interpretacji Twierdzenia Gödla, która, jak starałam się wykazać, dotyczyła jego ‘prose', nie zaś ‘proof' part. Wiadomo, że Wittgenstein traktował

[46] Ibidem, s. 96.
[47] Por. C. W r i g h t: *Wittgenstein on the Foundations of Mathematics*. Cambridge, Mass. 1980.

zdanie kłamcy a tym samym (w świetle przyjętych przez niego założeń) zdanie Gödla jako przykład kolejnej bezużytecznej gry językowej.

To, że twierdzenie Gödla pokazuje, że po pierwsze istnieje dobrze zdefiniowane pojęcie prawdy matematycznej dające się zastosować do każdej formuły z PM, oraz, że jeśli system PM jest niesprzeczny to pewne „prawdy matematyczne" są *w tym sensie* nierozstrzygalne w PM, nie jest, zdaniem Wittgensteina, twierdzeniem matematyki ale metafizyki. W tej sytuacji wyniki Gödla należałoby zakwalifikować nie tyle jako twierdzenia matematyki ile fragment nauk humanistycznych. Jednak jeśli zdanie S jest dowodliwe w PM to PM nie jest niesprzeczny, zaś jeśli $\neg S$ jest dowodliwe na gruncie PM to PM jest ω - niesprzeczny i to jest już – dowiedzione przez Gödla – twierdzenie *stricte* matematyczne. Wittgensteinowska krytyka jest więc, jak widać, w istocie wymierzona w ten rodzaj filozoficznej naiwności, która skłania filozofów do mylenia wspomnianych wyżej interpretacji, czy też przyjmowania, że pierwsza z nich wynika z drugiej.

Przedstawiona tu propozycja nie ma oczywiście charakteru wyczerpującego, nie planowałam dokonywać żadnych ostatecznych rozstrzygnięć. Próbowałam jedynie pokazać, iż Wittgenstein nie tyle zamierzał odrzucić zdania Gödla jako twierdzenia metafizyki czy pozbawić matematykę jej metafizycznego zainteresowania, ile, zgodnie z założeniem, że filozofia „pozostawia matematykę taką jaka jest", przekonać nas do tego, że jego przyjmowanie po prostu nam się nie opłaca.