Łukasz Lamża

INNA MATEMATYKA

Pomimo wielu wysiłków ze strony matematyków i filozofów nie jest do dzisiaj jasne, która z odpowiedzi na pytanie: „Czym jest matematyka?" jest najlepsza. Niniejsza praca ma na celu pokazanie, w jaki sposób badania psychologiczne nad procesami umysłowymi związanymi z wykonywaniem zadań matematycznych, a zwłaszcza z twórczą pracą nad twierdzeniami matematycznymi, pomagają w ocenie poszczególnych koncepcji z zakresu filozofii matematyki. W szczególności, zdolność wybitnie uzdolnionych matematycznie osób do powtarzalnego osiągania subiektyw+nego poczucia pewności w zakresie sądów matematycznych w abstrakcji od formalnego dowodu tych sądów nie daje się łatwo uzgodnić ze stanowiskiem formalistycznym, a świadectwa z zakresu matematyki „obliczeniowej" stawiają w podobnym świetle tezy zwolenników strukturalizmu. W pracy omówionych zostaje kilka typowych *case studies* (m.in. postać i metoda pracy S. Ramanujana, badania J. Hadamarda nad psychologią odkrycia matematycznego oraz fenomen autystycznych sawantów) i następuje próba oszacowania ich istotności dla filozofii matematyki.

1. Wprowadzenie

Matematyka cieszy się wyjątkową sławą nauki zdolnej do osiągnięcia prawdziwej pewności. To specyfika metody dedukcyjnej sprawia, że zdanie „2+2=4" zawsze będzie miało inny charakter epistemologiczny niż zdanie „We wnętrzu Ziemi znajduje się płynne jądro", jakkolwiek silne by nie były dowody obserwacyjne wskazujące na prawdziwość tego drugiego zdania. Twierdzenie matematyczne, gdy tylko zostanie udowodnione, nie wymaga dalszego potwierdzania: jego prawdziwość jest *apodyktyczna*. Matematycy wypowiadają się o tej własności z wyraźną dumą:

G. H. Hardy traktował to poczucie jako ograniczenie narzucone na filozofię matematyki: „Wydaje mi się, że żadna filozofia nie może spotkać się z sympatią matematyka, jeśli nie uzna, w takiej czy innej formie, niezmiennej i bezwarunkowej prawdziwości prawdy matematycznej. Twierdzenia matematyczne są prawdziwe lub fałszywe; ich prawdziwość lub fałszywość jest absolutna i niezależna od naszej o nich wiedzy. W pewnym sensie, prawda matematyczna jest częścią rzeczywistości obiektywnej"[1].

Przejście od epistemologicznej pewności do sądów ontologicznych następuje, jak widać, podejrzanie łatwo – skoro prawdziwość sądów matematycznych jest absolutna, czyż nie kłóci się to z ich istnieniem „po prostu" jako tworów człowieka? Wielu matematyków przylgnęło w konsekwencji do stanowiska nazywanego zwykle „matematycznym platonizmem", zgodnie z którym obiekty i sądy matematyczne istnieją niezależnie od ludzkiej rzeczywistości kulturowej (w której matematyka stanowi po prostu jeden z wyspecjalizowanych języków) jako część „rzeczywistości obiektywnej".

Na tym tle tym bardziej fascynujące jest więc obserwowanie, w jaki sposób *faktycznie* rozwija się matematyka. Okazuje się bowiem, że metoda dedukcyjna nie stanowi bynajmniej jedynego rzeczywistego *źródła* twierdzeń matematycznych.

Istnieją dziś liczne dowody – zarówno eksperymentalne, jak i historyczne – że żadne produktywne rozumowanie matematyczne nie jest możliwe tylko przy pomocy środków formalnych. Można posiadać całą formalną wiedzę istotną dla danego tematu (definicje, aksjomaty, twierdzenia, dowody itd.), jednak system sam w sobie nie działa w sposób kreatywny (nie rozwiązuje problemów, nie produkuje twierdzeń i dowodów itd). Przekonanie to potwierdzają matematycy w swoich notatkach autobiograficznych i introspektywnych, potwierdzają je również badania eksperymentalne[2].

Francuski matematyk Henri Poincaré powiedział w odniesieniu do procesów umysłowych stojących za swoimi odkryciami matematycznymi, że „najbardziej uderzające jest owo wrażenie nagłego olśnienia"[3], co stoi w wyraźnym kontraście

[1] D. I s a a c s o n: *Mathematical Intuition and Objectivity.* W: *Mathematics and Mind* (A. George, ed.). Oxford 1994, s. 118.
[2] E. F i s c h b e i n: *Intuition in Science and Mathematics: An Educational Approach*. New York 2002, s. 16.
[3] M. F i t z g e r a l d, I. J a m e s: *The mind of the mathematician*. Baltimore 2007, s. 50.

z systematycznym charakterem dowodu matematycznego. Ten sam Godfrey Hardy, który z taką emfazą podkreślał absolutną prawdziwość matematyki, wyraził kiedyś opinię o swoim koledze po fachu, że „trudno by było znaleźć matematyka przewyższającego go w technicznym mistrzostwie, brakowało mu jednak zdolności «nieprecyzyjnego myślenia» („*thinking vaguely”*)”[4]. „Nieprecyzyjne myślenie" jako fundament rozwoju matematyki? Istnieją interesujące świadectwa historyczne i eksperymentalne, które warto w tym kontekście przywołać. Wygląda na to, że matematycy nie dochodzą do swych twierdzeń tylko po krokach rozumowania dedukcyjnego. Występuje więc rażący kontrast między najsilniej ze wszystkich nauk sformalizowanym kontekstem uzasadnienia twierdzeń a nieprawdopodobnie czasem irracjonalnym kontekstem odkrycia, w opisach którego często pada słowo „intuicja matematyczna".

Filozofia matematyki poświęciła wiele uwagi problemowi intuicji; jeden z kluczowych filozofów zajmujących się tym tematem, Charles Parsons, wyraził w jednym ze swoich tekstów przekonanie, że „przynajmniej elementy prostej arytmetyki [...] mogą stać się *intuicyjnie oczywiste”*[5]. Skoro zaś jedno twierdzenie („2+2=4") można uzasadnić intuicyjną oczywistością, czemu nie wszystkie pozostałe? W jaki właściwie sposób matematyk uzyskuje intuicyjną pewność prawdziwości pewnego twierdzenia, gdy twierdzenie owo nie jest jeszcze wywiedzione dedukcyjnie?

Organizacja tej pracy jest następująca: najpierw opisany zostanie nieco bliżej formalny mechanizm dowodu matematycznego, powiedziane też będzie więcej na temat intuicji matematycznej i przekazów mogących rzucić nieco światła na procesy zachodzące w umysłach wybitnych matematyków. Następnie wprowadzona zostanie postać genialnego indyjskiego matematyka S. Ramanujana, którego niezwykła metoda matematyczna będzie pretekstem do pogłębienia kwestii różnicy między metodą formalną a intuicyjną i poruszenia trudnego tematu charakteru bytów matematycznych. Kilka dalszych przykładów dobrze udokumentowanej „innej matematyki" pozwoli nam ujrzeć temat na szerszym tle. Następnie postawiona zostanie hipoteza, iż matematyka „myślna", a więc taka, jaka jest obecna w realnych

[4] R. K a n i g e l: *The man who knew infinity. A life of the Genius Ramanujan*. New York 1991, s. 284.
[5] Ch. P a r s o n s: *Intuition and Number*. W: *Mathematics and Mind*..., s. 144.

aktach „myślenia matematycznego", jest tworem znacząco odmiennym od sformalizowanej matematyki symbolicznej – w stopniu, który uniemożliwia m.in. przyjęcie formalistycznego i strukturalistycznego stanowiska ontologicznego w kwestii przedmiotów matematycznych.

2. Zaksjomatyzowana matematyka i formalizm

To nowy świat, fundamentalnie odmienny od realnych przedmiotów i zdarzeń – świat konstrukcji umysłowych, rządzony wewnętrznie przez formalnie wyrażone prawa: świat matematyki. Ma w zamierzeniu funkcjonować na sposób całkowicie samodzielny: produkuje swe własne obiekty i odnosi je do siebie nawzajem zgodnie z własnymi regułami; niesie ze sobą szczególną odmianę konieczności – konieczność logiczną, całkowicie odmienną od empirycznej przyczynowości; cechuje go wreszcie swoista odmiana pewności, którą można zredukować do formalnego rygoru[6]. – pisał o matematyce Efraim Fischbein, statystyk pochodzenia żydowskiego i badacz intuicji matematycznej. Ów formalny rygor został współcześnie zawarty w postaci tzw. teorii dowodu, która w systematyczny sposób opisuje wszystkie warunki logiczne, które musi spełnić rozumowanie matematyczne, aby jego wnioski można uznać za prawdy logiczne. Współcześnie każda nowa hipoteza matematyczna musi zostać formalnie udowodniona na fundamencie już uznanych wyników; gdy tylko zostanie to uczynio+ne, przestaje być hipotezą: staje się powszechnie obowiązującym, *prawdziwym* twierdzeniem. W żadnej innej nauce – poza logiką, która często traktowana jest łącznie z matematyką – taka procedura nie jest możliwa.

Współcześnie równie istotna dla konstytucji matematyki jest jej aksjomatyczna fundacja. Najważniejszym krokiem na drodze do tego celu było monumentalne dzieło Russella i Whiteheada *Principia Mathematica*, w którym udało się wyprowadzić z aksjomatów, w sposób formalny, całą podstawową arytmetykę, ale także szeregi i niektóre twierdzenia dotyczące funkcji. Dziś konstruowanie podręczników matematyki w sposób aksjomatyczny jest praktycznie standardem; powszechne jest też

[6] E. F i s c h b e i n: *Intuition in Science and Mathematics...,* s. 15.

przekonanie, że wszystkie działy matematyki dają się wyprowadzić z teorii zbiorów[7], która to jest najczęściej używana jako baza aksjomatyczna[8].

Wszystkie te uwarunkowania mają fundamentalne znaczenie dla pytania, *czym* jest współczesna matematyka? W granicach matematyki rozumianej na sposób opisany powyżej, czyli jako formalny język ufundowany na aksjomatach, pytanie, czym jest liczba jeden, znajduje natychmiastową odpowiedź w ramach aksjomatów teorii zbiorów: $1 = \{\emptyset\}$. Możliwość podania formalnej definicji każdego obiektu matematycznego odsuwa w dal problem „platonizmu", jeżeli matematykę potraktuje się wyłącznie jako ów sformalizowany język, którym posługują się matematycy. Stanowisko takie nazywa się formalizmem. W jego ramach równie jasne jest źródło pewności dotyczącej prawdziwości danego twierdzenia matematycznego: jest ono prawdziwe, ponieważ gwarantują to prawa logiki wiążące ze sobą ciągi symboli wyrażające twierdzenia matematyczne. Taka koncepcja matematyki stoi jednak, jak się okazuje, w jawnej sprzeczności z matematyką, która „żyje" w umysłach matematyków.

3. Czym jest matematyka w umysłach matematyków?

„Jest całkowicie oczywiste, żaden *konkretny* zbiór znaków na papierze nie jest niezbędny dla myślenia o liczbach naturalnych"[9] – pisze Daniel Isaacson. Cytowana wcześniej wypowiedź Parsonsa zdaje się sugerować to samo. Codzienne doświadczenie uczy, że osoby niezaznajomione z aksjomatyczną strukturą matematyki mogą swobodnie wykonywać nawet wyrafinowane obliczenia; okazuje się ponadto, że do wykonywania prostych operacji arytmetycznych nie jest potrzebna *żadna* w ogóle

[7] Np.: „Many regard set theory as the foundation of mathematics. It seems that just about any piece of mathematics can be carried out in set theory". L. H o r s t e n: *Philosophy of Mathematics*. W: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Winter 2007 Edition)*. Edward N. Zalta (ed.), http://plato.stanford.edu/archives/win2007/entries/philosophy-mathematics/; odwiedzono w dn. 4.09.2009.

[8] Ważne ograniczenia przyniosły w tym temacie badania Kurta Gödla, który wykazał, że program „przepisania" matematyki jako spójnego i zamkniętego systemu (tzw. program Hilberta) skazany jest na klęskę: możliwe jest, jak się okazuje, wyrażenie w języku zaksjomatyzowanej matematyki (Gödel posłużył się właśnie przykładem *Principia Mathematica*) zdania, które nie jest w jego ramach rozstrzygalne. Wszelka próba „zamknięcia" systemu musi zaś prowadzić do wewnętrznych sprzeczności. Warto jednak podkreślić, że wyniki Gödla nie zamknęły możliwości aksjomatycznego formułowania działów matematyki (który to program jest kontynuowany z wielkim entuzjazmem), wskazały jedynie granice logiczne tego programu.

[9] D. I s a a c s o n: *Mathematical Intuition and Objectivity...,* s. 120.

edukacja matematyczna[10]. Na koniec wreszcie, sami matematycy często przyznają, że nie ma prostej zależności między zawartością ich umysłu a formalnym językiem matematyki. Albert Einstein, współpracując z matematykiem Jacques'em Hadamardem przy jego bogatym opracowaniu tematu kreatywności matematycznej[11], twierdził stanowczo, że „słowa i język, czy pisane czy mówione, nie wydają się odgrywać żadnej roli w moich procesach myślowych"[12]. Sam Hadamard wtórował mu: „Utrzymuję, że słowa są zupełnie nieobecne w moim umyśle, gdy naprawdę myślę"[13]. W jaki sposób pogodzić te świadectwa z czysto językowym rozumieniem matematyki, który przywołaliśmy powyżej?

O istotnej różnicy pomiędzy formalnymi obiektami matematycznymi a tym, co jawi się w umyśle matematyka, pisał nawet sam Gödel, który jak nikt inny przyczynił się do formalizacji matematyki. Richard Tieszen, relacjonując poglądy Gödla na naturę obiektów matematycznych, pisał o „dwóch elementach matematyki", o których wypowiadał się Gödel: pierwszym, mającym sens „tylko o tyle, o ile [obiekty i fakty matematyczne] mogą być wyrażone lub uzyskane poprzez konstrukcję lub dowód" oraz drugim, „który wymaga ponadto, by owe rozważane obiekty i fakty były dane w konkretnej intuicji [naoczności] matematycznej."[14]

Nie jest łatwo określić, *czym* właściwie jest liczba 35, gdy jawi się w ludzkim umyśle; tym trudniej jest więc uchwycić, jakie są mechanizmy myślenia, które każą nam być bezwzględnie pewnym, że „35 = 7 × 5". Można jednak swobodnie wnioskować przez analogię, że mechanizmy te nie pokrywają się z formalnym dowodzeniem prawdziwości tego zdania na gruncie zaksjomatyzowanej matematyki. Pouczającym przykładem będzie pewnie skonfrontowanie zawartości własnego umysłu, gdy prezentuje się mu zdanie „1+1=2", z formalnym wywiedzeniem tego

[10] Kierunek badań antropologicznych związany z badaniem znajomości matematyki w społeczeństwach niepiśmiennych określa się jako etnomatematykę. Potwierdzono też obecność prostych zdolności matematycznych u dzieci mających nawet kilka miesięcy.
[11] Por. J. H a d a m a r d: *Psychologia odkryć matematycznych*. Tłum. R. Molski. Warszawa 1964.
[12] M. F i t z g e r a l d, I. J a m e s: *The mind of the mathematician...*, s. 48.
[13] Ibidem, s. 47.
[14] R. L. T i e s z e n: *Mathematical Intuition: Phenomenology and Mathematical Knowledge.* New York 1989, s. 13.

faktu, które Russell i Whitehead zamieścili, jako twierdzenie 54-43, w *Principia Mathematica*[15]:

$$*54{\cdot}43.\quad \vdash :.\ \alpha, \beta \in 1\ .\supset :\ \alpha \cap \beta = \Lambda\ .\equiv .\ \alpha \cup \beta \in 2$$

Dem.

$$\vdash .\ *54{\cdot}26\ .\supset \vdash :.\ \alpha = \iota\text{‘}x\ .\ \beta = \iota\text{‘}y\ .\supset :\ \alpha \cup \beta \in 2\ .\equiv .\ x \neq y\ .$$

$$[*51{\cdot}231] \qquad \equiv .\ \iota\text{‘}x \cap \iota\text{‘}y = \Lambda\ .$$

$$[*13{\cdot}12] \qquad \equiv .\ \alpha \cap \beta = \Lambda \qquad (1)$$

$$\vdash .\ (1)\ .\ *11{\cdot}11{\cdot}35\ .\supset$$

$$\vdash :.\ (\exists x, y)\ .\ \alpha = \iota\text{‘}x\ .\ \beta = \iota\text{‘}y\ .\supset :\ \alpha \cup \beta \in 2\ .\equiv .\ \alpha \cap \beta = \Lambda \qquad (2)$$

$$\vdash .\ (2)\ .\ *11{\cdot}54\ .\ *52{\cdot}1\ .\supset \vdash .\ \text{Prop}$$

From this proposition it will follow, when arithmetical addition has been defined, that $1 + 1 = 2$.

Warto podkreślić, że powyższy dowód nie jest tylko ciekawostką logiczną; powyższe twierdzenie jest *powodem*, dla którego zdanie „1+1=2" jest prawdziwe na gruncie arytmetyki rozumianej tak, jak rozumie ją większość współczesnych matematyków[16]. Czy intuicyjna oczywistość (o której pisał Parsons), z którą jawi się naszemu umysłowi zdanie „1+1=2", pokrywa się z uzasadnieniem podanym powyżej, nawet po przetłumaczeniu go na język potoczny? Czy też mamy tu do czynienia po prostu z innym gatunkiem uzasadnienia i z innym źródłem wiedzy matematycznej?

4. Pewność w kontekście odkrycia, pewność w kontekście uzasadnienia

Zanim bliżej rozważymy to pytanie, zwróćmy najpierw uwagę na pewien istotny aspekt „umysłowego mechanizmu wywodzenia twierdzeń": na subiektywne poczucie pewności. Temat ten został zbadany przez Fischbeina w kontekście edukacyjnym:

Gdy przechodzisz ulicę, musisz absolutnie wierzyć w to, co widzisz – zbliżające się auta, rozmaite odległości itp. – w przeciwnym razie twoje reakcje staną się nieciągłe

[15] Por. http://en.wikipedia.org/wiki/Principia_Mathematica; odwiedzono w dn. 4.09.2009.

[16] Chodzi tu o matematyków, którzy opowiadają się za jej formułą aksjomatyczno-dedukcyjną. Istnieją oczywiście alternatywne propozycje, oparte na innych aksjomatach teorii zbiorów, albo na innej „teorii podstawowej", np. teorii kategorii. Wszystkie jednak muszą uwzględniać tego typu twierdzenia.

i niedopasowane do sytuacji. Podobnie w czasie procesu myślowego musisz wierzyć – przynajmniej chwilowo, acz absolutnie – w swoje myśli i w interpretacje chwilowych rozwiązań, w przeciwnym razie tok myśli będzie sparaliżowany. To właśnie taką odmianę przekonania nazywam intuicją[17].

Nieco dalej autor ten zauważył celnie: „Już *po* osiągnięciu pewnego (tymczasowego) rozstrzygnięcia, zwykle przeprowadza się swego rodzaju analizę i proces weryfikacji”[18]. Być może w tym sensie Hardy pisał o „nieprecyzyjnym myśleniu” – bez zawieszenia na chwilę wymogu ścisłego rygoru niemożliwe jest sięgnięciem umysłem do konkluzji, która znajduje się poza zakresem tego, co chwilowo apodyktycznie pewne. W ten tylko sposób możliwe jest dotarcie do czegoś *nowego* – a to, co odróżnia matematyka genialnego od przeciętnego, to docieranie na tej drodze do konkluzji prawdziwych, które późniejsza weryfikacja, przeprowadzona już w duchu matematycznego rygoru, potwierdza. Podziałowi temu odpowiada klasyczne rozróżnienie na kontekst odkrycia i kontekstu uzasadnienia. W momencie odkrycia następuje subiektywne poczucie pewności, które nie jest formalnie ugruntowane; w procesie uzasadnienia pewność zostaje uzyskana ponownie, jednak na platformie środków formalnych dostarczonych przez teorię dowodu.

Wielu matematyków potwierdza, że skonstruowanie formalnego dowodu następuje *później* niż osiągnięcie konkluzji. Hadamard na podstawie setek świadectw historycznych opracował ogólny model odkrycia matematycznego, w którym po etapie „przygotowania” i „inkubacji” następuje kluczowy moment „olśnienia”, którego sfinalizowanie następuje w procesie „weryfikacji”[19].

Wszystkie te rozważania czas teraz przedstawić na konkretnym historycznym przykładzie, trudno zaś o lepszy przykład genialnej intuicji matematycznej niż ten, który odnajdziemy w osobie Ramanujana.

[17] E. F i s c h b e i n: *Intuition in Science and Mathematics...,* s. 28.
[18] Ibidem.
[19] Por. M. F i t z g e r a l d, I. J a m e s: *The mind of the mathematician...,* s. 52-53.

5. Ramanujan

Srinivasa Ramanujan żył na przełomie XIX i XX wieku (1887-1920); w młodości pobrał tylko bardzo wyrywkową edukację matematyczną w swoim rodzinnym mieście Kumbakonam w południowych Indiach. Kluczowym momentem było dla niego napotkanie książki brytyjskiego nauczyciela matematyki George'a Carra zatytułowanej *Synopsis of Elementary Results in Pure and Applied Mathematics*. Co szczególnie istotne, nie jest ona właściwie podręcznikiem matematyki, lecz *zbiorem konkretnych wyników* w matematyce; jest to po prostu zbiór paru tysięcy kolejno wypisanych wzorów matematycznych[20]. Ramanujan natrafił na książkę Carra, gdy miał ok. 16 lat i oddał się bez reszty jej czytaniu, notując na luźnych kartkach przekształcenia napotkanych tam twierdzeń, rozwinięcia i uogólnienia, które przychodziły mu do głowy, później zaś również własne twierdzenia, które miały niewiele wspólnego z oryginalnym tekstem Carra. Notował zaś tak, jak jego mistrz: bez dowodów, często bez najmniejszych wskazówek co do metody ich wyprowadzenia.

Notatki te, wzbogacane i przepisywane przez resztę krótkiego życia Ramanujana, stały się trzonem tzw. *Notatników*, zawierających w sumie ok. 4000 twierdzeń matematycznych. Tym, co zadecydowało o włączeniu Ramanujana w poczet najwybitniejszych matematyków wszechczasów, jest nie tylko przeważająca prawdziwość jego wyników, ale również niezwykła trudność w ich wywiedzeniu metodą formalną. *Notatniki* są do dziś obiektem intensywnych badań matematyków z całego świata, a wielkim wydarzeniem w matematyce bywa rygorystyczne udowodnienie któregoś z ciekawszych twierdzeń Ramanujana, które ów zapisał od razu w gotowej formie. Właśnie: udowodnienie. Żaden profesjonalny matematyk nie będzie jest przecież skłonny zaakceptować jakiegokolwiek twierdzenia, jeśli nie zostanie ono precyzyjnie wywiedzione, opierając się wyłącznie na subiektywnym poczuciu oczywistości, jakiego zaznał Ramanujan 100 lat temu.

Ramanujan dostał w 1913 roku zaproszenie do Cambridge, gdzie rozpoczął okres kilkuletniej współpracy z jednym z najwybitniejszych angielskich matematyków

[20] Por. R. K a n i g e l: *The man who knew infinity...,* s. 39.

owego czasu, wspomnianym już Godfreyem Hardy'm. Nierzadko współpraca polegała po prostu na długotrwałym rozważaniu pewnego rezultatu z *Notatników* i próbie odnalezienia rygorystycznego dowodu dla tego rezultatu. Trudności z komunikacją polegały również na nieumiejętności wytłumaczenia przez Ramanujana istoty swojej metody. Lub inaczej, na niemożności podania *racjonalnego* wytłumaczenia dla swojej metody: Ramanujan przez całe życie otwarcie i konsekwentnie utrzymywał, że inspirację zawdzięcza bogini-opiekunce jego rodziny, Namagiri, która zsyłała mu natchnienie we śnie. Zanotowano również jego wypowiedź, w której twierdził, iż „równanie nie ma dla mnie znaczenia, jeśli nie wyraża myśli Boga”[21]. W zrozumieniu fenomenu jego kreatywności nie pomagał fakt, że momenty olśnienia *faktycznie* przychodziły czasem we śnie. Narayana Iyer, indyjski matematyk, z którym Ramanujan współpracował jeszcze w Indiach, wspominał, że „czasem, gdy już poszli spać, Ramanujan budził się i w migotliwym świetle lampy sztormowej notował coś, co, jak wyjaśniał, przyszło do niego we śnie”[22].

Wszystkie te rewelacje nie są mile widziane przez zwolenników racjonalnego tłumaczenia źródła zjawisk umysłowych. Sam Hardy, będąc zagorzałym ateistą, nie dawał zupełnie wiary wszelkim wytłumaczeniom ponadnaturalnym i uważał talent Ramanujana za nie różniący się niczym od talentu innych matematyków[23]. W niniejszym opracowaniu my również pozostaniemy sceptyczni wobec źródeł ponadnaturalnych wiedzy matematycznej, co nie znaczy jednak, że „talent matematyków” jest zjawiskiem pozbawionym tajemnicy i dającym się łatwo wyrazić w języku odwołującym się do tradycyjnego pojęcia matematyki.

Oddajmy jeszcze raz głos Hardy'emu, który spełnia przecież dla nas idealną rolę: krytycznego, trzeźwo myślącego matematyka, który miał kontakt z geniuszem z Indii, a przy tym sam był matematykiem najwyższych lotów. Hardy współpracował również z Hadamardem przy jego pracy, a w komentarzu do jego *Psychologii odkryć matematycznych* pisał, że „aktywność podświadoma często odgrywa kluczową rolę

[21] Ibidem, s. 7.
[22] Ibidem, s. 98.
[23] W czasie wykładu poświęconego Ramanujanowi, Hardy przedstawił obraz tego matematyka „nie jako przybyłego ze Wschodu cudu, genialnego idioty lub dziwu psychologicznego, lecz jako racjonalnej istoty ludzkiej, której przydarzyło się zostać wielkim matematykiem”. Por. ibidem, s. 283.

w odkryciu; po okresach nie przynoszącego rezultatów wysiłku może nastąpić, po chwili odpoczynku lub rozproszenia, moment nagłej iluminacji. Owe błyski inspiracji są wytłumaczalne tylko jako rezultat aktywności, której dana osoba nie była świadoma – a dowody na to wydają się być przytłaczające”[24].

Jeśli zaś sami matematycy zdają się masowo potwierdzać konieczną obecność „błysku intuicji”, nierozsądne wydaje się odrzucenie tych świadectw jako swoistej naukowej mitologii, za którą kryje się wyłączne nieinteresująca rzeczywistość skrupulatnej, systematycznej pracy. Ta jest bez najmniejszego wątpienia przeważającym składnikiem pracy matematyka, jednak interesująca nas kwestia *poszerzenia* wiedzy wiąże się nieodłącznie z czymś diametralnie od niej różnym.

Podsumujmy może dotychchczasowe ustalenia.

6. Istota problemu; hipoteza

Wydaje się być potwierdzonym faktem, że sposób, w jaki byty matematyczne jawią się matematykom (oraz zwykłym ludziom) w czasie ich umysłowego unaoczniania jest różny od sposobu ich istnienia, który wynika z ich formalnej definicji[25]. Co jednak ważniejsze, faktyczny rozwój matematyki, nawet w jej najbardziej złożonych dziedzinach, wydaje się zależeć od procesów myślowych, które można najłagodniej określić jako „nieformalne”. Analiza Fischbeina wskazuje, w jaki sposób rozumowanie matematyczne wymaga od rozumującego wykroczenia poza to, co logicznie dozwolone, z czysto formalnego powodu. Chwilowe przyjęcie danego sądu za prawdziwy wymagane jest, aby rozumowanie mogło toczyć się dalej[26]. Przytoczone wypowiedzi aktywnych matematyków pokazują zaś, że ów „brak rygoru” wykracza dalece poza zwykłe przejściowe przypisanie krokom pośrednim

[24] G. H. Hardy: *The Collected Papers of G.H. Hardy*. Oxford 1979, s. 835. Cyt. za: A. Garnham, J. Oakhill: *Thinking and reasoning*. New York 1994, s. 243.

[25] Na początku XX wieku dwóch szwajcarskich psychologów (E. Claparède i T. Flournoy) przeprowadziło badania statystyczne, z których wynikało m.in., że przeważająca większość praktykujących matematyków korzysta w czasie rozumowania z obrazowania graficznego, dźwiękowego, ruchowego i odmian mieszanych, zaś mniejszość korzysta z wyobrażeń słownych i językowych. Por. M. Fitzgerald, I. James: *The mind of the mathematician...*, s. 46.

[26] Fischbein twierdzi wręcz, że „intuicje to te poznania, w których kluczową rolę odgrywa nadmierna pewność (*overconfidence*)”. E. Fischbein: *Intuition in Science and Mathematics...*, s. 28.

nieuzasadnionej wartości logicznej: w wielu przypadkach tych kroków pośrednich po prostu brakuje. Spektakularny jest przykład Ramanujana, który miał wszak największy interes w formalnym wykazaniu prawdziwości swoich twierdzeń, gdy już współpracował z angielskimi matematykami; nierzadko jednak nie był w stanie tego dokonać i posiadał jedynie mgliste pojęcie o „krokach pośrednich" prowadzących do konkluzji spisanych w swoich notatkach. Również hipoteza, że tak naprawdę jego umysł „przeprowadzał rozumowanie" w sposób rygorystyczny, sam Ramanunan nie był jednakże tego świadom, nie najlepiej daje się pogodzić z faktem, że ów tak naprawdę w ogóle nie znał reguł rygorystycznego dowodu[27].

Na obecnym etapie wywodu sensowne będzie wysunięcie następującej hipotezy: „Przedmioty matematyczne będące przedmiotami myśli znajdują się wobec siebie w relacjach innych niż przedmioty matematyczne zaksjomatyzowanej matematyki". Zauważmy, że istnieje popularne stanowisko w filozofii matematyki – strukturalizm – które właśnie w relacjach między obiektami matematycznymi upatruje ich istoty: „przedmioty matematyczne są miejscami lub pozycjami w strukturach" lub, równoważnie, „struktury składają się z miejsc będących wobec siebie w relacjach strukturalnych"[28].

Postawioną tu hipotezę należy koniecznie starannie przeanalizować i wyjaśnić wątpliwości, które budzi. Zanim jednak to nastąpi, przywołajmy jeszcze jedno zjawisko związane z matematyką, które może upewnić nas o konieczności jej rozważenia.

7. Sawanci

Dobrze znany w psychologii jest przypadek „sawanta", czyli osoby upośledzonej pod wieloma względami, jednak wyróżniającej się nieprawdopodobną biegłością w jednej tylko dziedzinie: może być to zapamiętywanie tekstów, talenty językowe lub artystyczne, czasem zaś ponadprzeciętne zdolności obliczeniowe. Słowo „ponadprzeciętne" wydaje się tu być za słabe; niektórzy sawanci mają zdolności

[27] „Jego pojęcie o istocie dowodu matematycznego jest nad wyraz mgliste" – pisał o nim Hardy S.R. Ramanujan: *Collected papers*. Cambridge 1927, s. xxx. Cyt. za: M. Fitzgerald, I. James: *The mind of the mathematician...*, s. 52.

[28] L. Horsten: *Philosophy of Mathematics*...

niemal ponadnaturalne. Dwie badaczki tego zagadnienia użyły następującej trawestacji Orwella: „Wszyscy ludzie są wyjątkowi, ale niektórzy są bardziej wyjątkowi od innych"[29]. Słowa te wydają się wręcz sugerować nie ilościowy, a jakościowy charakter różnicy; istniejące badania wydają się potwierdzać to przypuszczenie.

Dobrze zbadany i opisany jest przypadek Holendra Wima Kleina, który, pośród innych osiągnięć, w kontrolowanych warunkach obliczył w niecałe 3 minuty pierwiastek 73 stopnia z 507-cyfrowej liczby[30]. Znane są też przypadki głęboko upośledzonych osób nie potrafiących wykonać prostych operacji arytmetycznych, które jednak są w stanie momentalnie podać, jaki był dzień tygodnia, powiedzmy, 7. stycznia 465 roku. Co ważne, istnieją niezliczone metody matematyczne pozwalające na rozwiązanie tego problemu (podobnie jak obliczenie ww. pierwiastka), żadna z nich jednak nie wydaje się pozwalać człowiekowi na osiągnięcie wyniku tak szybko. Innymi słowy, najbardziej biegli i doświadczeni matematycy, którym przyszłoby obliczyć rzeczony pierwiastek „legalnymi" metodami, potrzebowaliby na obliczenia kilka rzędów czasu więcej. Wygląda na to, że sawanci nie wykonują po prostu „legalnych" obliczeń szybciej – oni uzyskują wynik *zupełnie inną metodą*, której wyjaśnić nie są oczywiście w stanie. Owa *zupełnie inna metoda* jest szczególnie ważnym punktem naszych rozważań, warto więc upewnić się, co to konkretnie oznacza.

„Jeden z sawantów potrafił podać pierwiastek trzeciego stopnia z sześciocyfrowej liczby w 5 sekund oraz w parę sekund podwoić liczbę 8388628 dwadzieścia cztery razy, by uzyskać wynik 140737488355328"[31]. Jaki jest „normalny" sposób wykonania tej ostatniej kalkulacji? Bierze się liczbę 8388626 i mnoży przez 2; wynik mnoży się przez 2; wynik mnoży się przez 2... i tak 24 razy. Gdyby opisywana osoba rzeczywiście wykonywała wszystkie te operacje, na jedną z nich miałaby średnio 1/5 sekundy; podwojenie dziesięciocyfrowej liczby w 1/5 sekundy, zapamiętanie wyniku i natychmiastowe wykonanie tej operacji ponownie wydaje się nieprawdopodobne. Wielu badaczy tego zjawiska podejrzewało więc, że osoby o takich zdolnościach

[29] N. S m i t h, I.-M. T s i m p l i: *The Mind of a Savant*, Oxford & Cambridge 1995, s. xi.
[30] Por. S. S c h r e i n e r: *Meet the Human Calculator*. http://stepanov.lk.net/mnemo/mkleine.html; odwiedzono w dn. 4.09.2009.
[31] A. W. S n y d e r, D. J. M i t c h e l l: *Is integer arithmetic fundamental to mental processing?: the mind's secret arithmetic*, Proceedings – Royal Society of London. Biological sciences, 1999, nr 266 (1419), s. 589.

posługują się różnego typu „skrótami” i „sztuczkami”. Nawet jednak stosowanie różnego typu wytłumaczalnych matematycznie „sztuczek” niewiele czasem pomaga: w innym badaniu porównywano czas uzyskany przez sawanta i studenta informatyki specjalnie szkolonego w rozwiązywaniu określonego zadania przy pomocy różnych algorytmicznych „sztuczek”. Sawant potrafił wykonać w sekundę zadanie, które studentowi zajmowało 11 sekund; to zaś jest czas i tak dramatycznie poprawiony wobec czasu potrzebnego do wykonania zadania przy pomocy metody „tradycyjnej”[32]. Na koniec wreszcie, wiele badań wskazuje na to, że „zdolność w liczeniu w myślach jest niezależna od ogólnego wykształcenia”[33] – opisany powyżej sawant mógł w ogóle *nie znać* standardowej metody wykonania tego zadania. Wielu tego typu „człowieczych kalkulatorów” nie potrafi czytać i pisać, przez co próba wytłumaczenia ich zdolności poprzez „nadnaturalnie” szybkie wykonywanie „normalnych” technik obliczeniowych nie ma większego sensu, skoro osoby o takich zdolności częstokroć są analfabetami matematycznymi: *nie znają* normalnych technik obliczeniowych.

Są przypadki, w których nie sposób dojść do innego wniosku: „Jednym z nich był 26-letni Anglik, który doznał ataku epilepsji, gdy miał trzy lata. Od tego czasu był w stanie widzieć liczby jako kształty, kolory i tekstury. Nie tylko posiadał zdolności sawanta, potrafił również opisywać, co jawi mu się w umyśle. «Gdy mnożę przez siebie liczby», opowiadał, «widzę dwa kształty. Obraz zaczyna się zmieniać i ewoluować, po czym wyłania się trzeci kształt. To jest odpowiedź. To wszystko obrazy. To jak matma, tylko że nie muszę myśleć.»”[34] Łatwo znaleźć tu analogię z niewiedzą Ramanujana odnośnie mechanizmów dowodu matematycznego. Krótko mówiąc, wynik sam w sobie wydaje się być *niezależny* od metody jego uzyskania. Przy całej naszej znajomości matematyki, którą udało się nam praktycznie „rozłożyć” na części pierwsze (a w kwestiach obliczeniowych dosłownie sprowadzić do postaci zerojedynkowej w krzemowych ciałach komputerów), tego typu dziwaczne przypadki domagają się po prostu „innej matematyki”.

[32] Por. ibidem, s. 68.
[33] M. F i t z g e r a l d, I. J a m e s: *The mind of the mathematician...*, s. 18.
[34] Ibidem, s. 19.

8. Z powrotem do hipotezy

Rozwińmy naszą lapidarną hipotezę do bardziej jasnej formy opisowej, korzystając z opisanych w pracy przykładów. Jest jasne, że sposób, w jaki jawią się przedmioty matematyczne – czy to zwykłym ludziom, czy wybitnym matematykom, czy sawantom – jest znacząco odmienny od sposobu, w jaki istnieją jako elementy sformalizowanej matematyki. Nie jest to zaskakujące. Nieco bardziej niepokojące jest to, że relacje, w jakie wchodzą owe przedmioty – w szczególności te relacje, które pozwalają na uzyskiwanie jednych prawdziwych zdań matematycznych z innych – również bywają odmienne. Najbardziej ostrego przykładu dostarczają procesy umysłowe niezwykle zdolnych „obliczeniowców". Ani „standardowe" kroki dowodowe czy obliczeniowe, ani żadne ze znanych matematykom „sztuczek", nie wydają się posiadać swoich myślowych odpowiedników w umysłach osób wykonujących te operacje z wielką swobodą i z subiektywnym poczuciem oczywistości. Skonfrontujmy teraz te obserwacje z dwoma wspomnianymi stanowiskami w filozofii matematyki.

Zwolennicy formalizmu twierdzą, że matematyka jest „grą na symbolach", a określony formalizm matematyczny nie tyle *wyraża* dany dział matematyki, co stanowi jego *definicję*. W ramach formalizmu powiązania logiczne między zdaniami są jednoznacznie ustalone – od przesłanek dowodu do dowiedzionego twierdzenia wiedzie nieprzerwany ciąg prawdziwych wynikań i nie jest możliwe „obejście" tego ciągu. Jest oczywiście możliwe wyrażenie dowolnego zdania bez jego dowiedzenia, przez co formalizm w żadnym razie nie zaprzecza możliwości „zgadywania" twierdzeń przez matematyków. Wydaje się jednak niemożliwe powiązanie tego akurat stanowiska z możliwością istnienia alternatywnej *metody* dochodzenia do prawdziwych twierdzeń.

Zwolennicy strukturalizmu twierdzą, że określony formalizm matematyczny stanowi *formę wyrazu* struktury matematycznej, która jest prawdziwym obiektem zainteresowania matematyków. Wszelka reprezentacja, która zachowuje ową strukturę – czy to reprezentacja symboliczna oparta na formalizmie teorii zbiorów, czy reprezentacja przy pomocy patyczków i kamieni – jest równie dobra. Stanowisko to zdecydowanie łatwiej pogodzić z opisywanymi tu faktami psychologicznymi, postulując, że w umysłach osób uprawiających matematykę wykształca się swoista struktura, na której dokonywane są wszelkie operacje matematyczne, i która pomimo swojej znaczącej odmienności od jakiegokolwiek powszechnie znanego formalizmu zachowuje określone relacje pozwalające na uzyskiwanie prawdziwych rezultatów. Obok matematyki „sformalizowanej” istnieje więc również potencjalnie nieskończona ilość matematyk „psychologicznych”, w których obiektami matematycznymi są kolorowe plamy, kulki, strzałki itp., jednak struktura „obu matematyk” jest jednak ta sama, co gwarantuje „przekładalność” języków.

9. Czy strukturalizm wyjaśnia opisane tu fakty psychologiczne?

Istnieje poważny problem z tym stanowiskiem, związany z tym, że struktura matematyki „sformalizowanej” jest nieprawdopodobnie „skrupulatna” – w stopniu, który czyni nieprawdopodobnym przypuszczenie, jakoby *wszystkim* relacjom między jej przedmiotami i zdaniami odpowiadały elementy matematyk „psychologicznych”. Problem polega na tym, że – co zauważyliśmy na samym początku – źródłem prawdziwości zdań matematyki jest właśnie ów nieprzerwany ciąg wynikań, w którym nie może zabraknąć ani jednego elementu.

Warto jest zdać sobie sprawę, co naprawdę oznacza „skrupulatność” matematyki. H. Poincaré w eseju „O naturze rozumowania matematycznego” analizuje stary sposób na udowodnienie zdania „2+2=4” na podstawie uważanej za zdefiniowaną liczby 1 oraz operacji dodawania 1 do danej liczby X[35]. Zajmuje to dokładnie 8 kroków. Gdybyśmy chcieli utrzymywać „strukturalistyczne wyjaśnienie” opisywanego problemu, musielibyśmy twierdzić, że każdemu z tych kroków odpowiada pewien „punkt w strukturze” subiektywnej matematyki, którą posługuje się każdy z nas, gdy dowodzimy prawdziwości zdania „2+2=4” na podstawie znanych przez nas reguł arytmetyki. Tak jednak nie jest. W rzeczywistości następuje natychmiastowy przeskok od przesłanek, którymi są reguły arytmetyki, do wniosku, którym jest „2+2=4”.

[35] Por. H. P o i n c a r é: *Nauka i hipoteza,* tłum. M.H. H o r w i t z, Warszawa 1908, s. 3-4.

Jeszcze jaśniej widoczny jest ten fakt, gdy zdamy sobie sprawy z faktu, że liczby naturalne definiowane są poprzez sukcesywne dodawanie liczby 1, począwszy od jedności. „2=1+1”, „3=2+1”, „4=3+1”... itd. Jest to klasyczny przykład indukcji matematycznej. Zdefiniowanie liczby 4 wymaga trzech kroków, licząc od aksjomatów. Zdefiniowanie liczby 1500 wymaga 1499 takich kroków. Sformalizowana matematyka domaga się wszystkich tych kroków bez wyjątku, aby zdania zawierające liczbę 1500 mogły być prawdziwe. Umysł ludzki w ogóle nie domaga się wszystkich tych kroków, jednak poczucie pewności związane z operacją „1500+200=1700” nie jest wcale gorszej próby, choć nie jest ono czerpane z konsekwentnego budowania pewności na gruncie udowodnionych już dań. *Struktura* myślenia matematycznego jest różna od struktury następstwa zdań matematyki formalnej.

Matematyka „psychologiczna” nie może być więc po prostu „rozrzedzoną” wersją matematyki „sformalizowanej”, ponieważ owo rozrzedzenie usuwa najbardziej istotny element konstrukcji matematyki, jakim jest źródło prawdziwości jej tez. Nie tylko sposób, w jaki jawią się przedmioty matematyczne, nie tylko sposób, w jaki dokonują się przejścia między zdaniami matematycznymi, ale też *źródło pewności* musi być tu odmienne.

10. Dlaczego nic nie działa?

H. Putnam zatytułował jeden ze swoich esejów: *Filozofia matematyki: dlaczego nic nie działa?*[36]. Analizował w nim wszystkie popularne stanowiska w filozofii matematyki: logicyzm, formalizm, platonizm, intuicjonizm i in., pokazując, dlaczego żadne z nich nie dostarcza satysfakcjonującego wyjaśnienia całokształtu zjawisk związanych z szeroko rozumianą matematyką. Jednym z omawianych tam problemów jest właśnie kwestia intuicji przedmiotów matematycznych i wyraźnej różnicy, jaka zachodzi między matematyką jako faktem psychologicznym a matematyką jako sformalizowanym językiem symbolicznym. Sam Putnam opowiada się za „realizmem kwazi-empirycznym” – stanowiskiem, które buduje pomost między rozumowaniem

[36] Por. H. P u t n a m: *Words and life.* Harvard 1995, 499-512.

dotyczącym przedmiotów empirycznych a rozumowaniem matematycznym[37]. W zgodzie z duchem tekstu Autor zapewnia jednak, że i to rozwiązanie nie wyjaśnia wszystkich znanych mu faktów.

Myślę, że najbardziej sensownym przypuszczeniem, które wydaje się wyjaśniać, dlaczego istnieją tak wielkie problemy ze zbudowaniem jednolitego stanowiska w filozofii matematyki – a więc łączącego opis formalizmu matematycznego, kwestie ontologiczne, zjawisko intuicji matematycznej i in. – jest to, że słowo „matematyka" nie posiada tak naprawdę pojedynczego desygnatu. Wielość cech wspólnych łączących np. myślenie ilościowe i praktyczne rozumowanie „matematyczne" z matematyką uniwersytecką przesłania fakt, że w istocie zjawiska te przynależą do różnych „światów" i że poszukiwanie takiego nadrzędnego sformułowania matematyki, które mogłoby wyjaśnić wszystkie „zjawiska matematyczne" jest raczej zbędną nadgorliwością. „Matematyka psychologiczna" i „matematyka sformalizowana" mogą być w rzeczywistości fundamentalnie odmiennymi zjawiskami, a dowolna postulowana „matematyka" mająca zjednoczyć w sobie ich cechy charakterystyczne jest tylko postulatem językowym.

[37] Por. ibidem, s. 505-506.

BIBLIOGRAFIA:

- F i s c h b e i n E.: *Intuition in Science and Mathematics: An Educational Approach*. New York 2002.
- F i t z g e r a l d M., J a m e s J.: *The Mind of the Mathematician*. Baltimore 2007.
- G a r n h a m A., O a k h i l l J.: *Thinking and reasoning*. New York 1994.
- H a d a m a r d J.: *Psychologia odkryć matematycznych*. Tłum. R. M o l s k i. Warszawa 1964.
- H o r s t e n L.: *Philosophy of Mathematics*. W: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Winter 2007 Edition)*, Edward N. Zalta (ed.), http://plato.stanford.edu/archives/win2007/entries/philosophy-mathematics/; odwiedzono w dn. 20.05.2009.
- I s a a c s o n D.: *Mathematical Intuition and Objectivity*. W: *Mathematics and Mind* (A. George, ed.), Oxford 1994, s. 118-140.
- K a n i g e l R.: *The Man who Knew Infinity. A Life of the Genius Ramanujan*. New York 1991.
- P a r s o n s R.: *Intuition and Number*. W: *Mathematics and Mind* (A. George, ed.), Oxford 1994, s. 141-157.
- P o i n c a r é H.: *Nauka i hipoteza*, tłum. M. H. H o r w i t z, Warszawa 1908.
- P o w e l l A., F r a n k e n s t e i n M.: *Ethnomathematics: Challenging Eurocentrism in Mathematics Education*. New York 1997.
- P u t n a m H.: *Words and Life.* Harvard 1995.
- S c h r e i n e r S.: *Meet the Human Calculator,* http://stepanov.lk.net/mnemo/mkleine.html; odwiedzono w dn. 20.05.2009.
- S m i t h N., T s i m p l i I.-M.: *The Mind of a Savant*. Oxford & Cambridge 1995.
- S n y d e r A. W., M i t c h e l l D. J.: *Is integer arithmetic fundamental to mental processing?: the mind's secret arithmetic*, Proceedings – Royal Society of London. Biological sciences, 1999, nr 266 (1419), s. 587-592.
- T i e s z e n R. L.: *Mathematical Intuition: Phenomenology and Mathematical Knowledge.* New York 1989.

CYTOWANE FRAGMENTY TEKSTÓW ANGLOJĘZYCZNYCH:

[1] "G. H. Hardy (1929) expressed this feeling as a constraint on the philosophy of mathematics: «It seems to me that no philosophy can possibly be sympathetic to a mathematician which does not admit, in one manner or another, the immutable and unconditional validity of mathematical truth. Mathematical theorems are true or false; their truth or falsity is absolute and independent of our knowledge of them. In *some* sense, mathematical truth is part of objective reality."

[2] "There is today much evidence – both experimental and descriptive – that no productive mathematical reasoning is possible by resorting only to formal means. One may possess all the formal knowledge relevant to a mathematical topic (definitions, axioms, theorem, proofs etc.) and yet the system does not work by itself in a productive matter (for solving problems, producing theorems and proofs etc.). This is what mathematicians affirm in their autobiographical and introspective notes and this is what results from cognitive and developmental, experimental studies."

[3] "Most striking at first is this appearance of sudden illumination"

[4] "For mastery of technique in a wide variety of subjects, it would be difficult to find his superior, but he lacked the power of 'thinking vaguely'."

[5] "... at least some of elementary arithmetic, typically the finitist part, can be made intuitively evident."

[6] "This is a new world, fundamentally different from that of real objects and real events – the world of mental constructs, internally ruled by laws formally stated, the world of mathematics. It is intended to function in an absolute autarchical way: it produces its own objects; it relates them one to the other according to its own principles; it has its specific type of necessity – logical necessity instead of empirical causality; it has its own type of certitude, a kind of certitude which is reducible to formal rigor."

[10] "It is patently clear that no *particular* set of marks on paper is necessary for the possibility of thought about the natural numbers."

[13] "«Words or language,» he said, «whether written or spoken, do not seem to play any part in my thought processes."

[14] "I insist that words are totally absent from my mind when I really think."

[15] "It is well-known that Gödel, following Barnays, concluded from his incompleteness results that we must «distinguish two component parts in the concept of finitary mathematics, namely: first the constructivistic element which consists in admitting reference to mathematical objects or facts only in the sense that they can be exhibited, or obtained by construction of proof; second, the specifically finitistic element which requires in addition that the objects and facts considered should be given in concrete mathematical intuition.»"

[18] "When crossing the street, you have to believe absolutely in what you see – the approaching cars, the various distances etc. – otherwise your reactions will be discontinuous and maladjusted. Analogically, during a reasoning process, you have to believe – at least temporarily (but absolutely) – in your representations, interpretations or momentary solutions, otherwise your flow of thought would be paralyzed. It is this type of belief that we call an intuition."

[19] "*After* a certain (provisional) solution is reached, one usually initiates some sort of analysis and verification process."

[22] "An equation for me has no meaning unless it expresses a thought of God."
[23] "Sometimes, after they had gone to sleep, Ramanujan would wake up and, in the feeble light of a hurricane lamp, record something that had come to him, he'd explain, in a dream."
[24] "... a picture in short, not of a wonder from the East, or an inspired idiot, or a psychological freak, but of a rational human being who happened to be a great mathematician."
[25] "... unconscious activity often plays a decisive part in discovery; that periods of ineffective effort are often followed, after intervals of rest of distraction, by moments of sudden illumination; that these flashes of inspiration are explicable only as the result of activities of which the agent has been unaware – the evidence for all this seems overwhelming."
[27] "... intuitions are specifically those cognitions in which overconfidence plays an essential role."

[28] "His ideas of what constitutes a mathematical proof were of the most shadowy description."

[29] "Structures consist of places that stand in structural relations to each other. Thus, derivatively, mathematical theories describe places or positions in structures."

[30] "As George Orwell might have written: all people are unique, but some are more unique than others."

[32] "For example, one savant (Hill 1978) could give the cube root of a six figure number in 5 seconds and he could double 8,388,628 twenty four times to obtain 140,737,488,355,328 in several seconds."

[35] "One was a 26-years-old Englishman who suffered an epileptic fit at the age of three. Ever since then he has been able to see numbers as shapes, colors, and textures. He not only has savant skills; he can describe what he sees in his head. «When I multiply numbers together,» he says, «I see two shapes. The image starts to change and evolve, and a third shape emerges. That's the answer. It's mental imagery. It's like maths without having to think."